

Synthèse de séminaire

L'astuce de Moser et application à la géométrie symplectique

Antoine Médoc, sous la direction du professeur San Vũ Ngọc

31 décembre 2022

Abstract. This report was made for a series of student talks during a master's degree in mathematics. First, we introduce the Lie derivative and the Cartan magic formula. Then we prove the Moser theorem using the Moser trick. Finally, we prove the Darboux theorem with the same method and we give an example of a hamiltonian vector field.

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Résumé et motivations	2
1.2	Cadre et notations	2
2	Dérivée de Lie	2
2.1	Définition	2
2.2	La formule magique de Cartan	4
3	Le théorème de Moser	4
4	Théorème de Darboux	6
4.1	Le théorème	6
4.2	Champs de vecteurs hamiltoniens	8
4.2.1	Définition	8
4.2.2	Un exemple	9
4.2.3	Dans une carte de Darboux	10

Références

- [Lee14] John M. LEE. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2^e éd. Graduate Texts in Mathematics 218. Springer, 2014. Chap. 9.
- [Mos65] Jürgen MOSER. « On the volume elements on a manifold ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 120.2 (1965), p. 286-294. DOI : 10.1090/S0002-9947-1965-0182927-5.
- [Silo6] Ana Cannas da SILVA. *Lectures on Symplectic Geometry*. Lecture Notes in Mathematics 1764. Springer-Verlag, 2006. Chap. 1, 6.1, 7, 8.1, 18.

1 Introduction

1.1 Résumé et motivations

À propos du rapport. Ce rapport a été réalisé dans le cadre d'un séminaire de master en mathématiques fondamentales à l'Université de Rennes 1 sous la direction du professeur San Vũ Ngọc. Il se base principalement sur [Silo6].

À propos du sujet. On se propose d'étudier deux cas particuliers d'un problème classique de géométrie symplectique. Soient M une variété de dimension paire, une sous-variété X de M , $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1$ deux voisinages de X et ω_0 (resp. ω_1) une forme symplectique sur \mathcal{U}_0 (resp. \mathcal{U}_1). Dans ce cadre, on s'intéresse à l'existence d'un symplectomorphisme préservant X , i.e. l'existence d'un difféomorphisme $\varphi : \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathcal{U}_1$ tel que $\varphi^*\omega_1 = \omega_0$ et $\varphi(X) = X$. On discutera ici des cas particuliers où X est réduite à un point et où X est l'espace M tout entier. On mentionne également les cas suivants qui permettent de conclure à l'existence d'un difféomorphisme entre deux voisinages tubulaires de X qui transforme ω_0 en ω_1 .

- Dans [Silo6], le théorème 7.4 aborde le cas où X est compacte et où les formes ω_0, ω_1 coïncident sur X .
- Dans [Silo6], le théorème aborde le cas où X est compacte et lagrangienne pour (M, ω_0) et (M, ω_1) .
- Le théorème de Weinstein-Darboux-Moser donne la condition nécessaire et suffisante suivante pour l'existence d'un tel difféomorphisme : les fibrés symplectiques de X orthogonaux pour ω_0 et pour ω_1 sont isomorphes. Les cas précédents peuvent être vus comme des applications de ce théorème plus général.

Résumé. Tout d'abord, dans la partie 2, on donne les outils qui seront utiles dans la suite. On définit la notion d'isotopie générée par un champ de vecteur, la dérivée de Lie et on donne la formule magique de Cartan. Dans la partie 3, on s'intéresse au cas où X est l'espace M tout entier et on présente une première application de l'astuce de Moser en prouvant le théorème de Moser 3.1. Enfin, dans la partie 4, on s'intéresse au cas où X est réduite à un point. On prouve le théorème de Darboux 4.1 par une deuxième application de l'astuce de Moser et on donne un exemple d'application de ce théorème en calculant un flot hamiltonien simple.

1.2 Cadre et notations

Dans toute la suite,

- M est une variété réelle;
- n est un entier naturel non nul;
- I est un intervalle de \mathbb{R} voisinage ouvert de 0;
- $\Omega(M)$ est l'ensemble des formes différentielles sur M ;
- le produit intérieur de $\omega \in \Omega(M)$ et d'un champ de vecteur v sur M est noté $\iota_v\omega$.

2 Dérivée de Lie

2.1 Définition

Dans cette partie, on redéfinit la notion d'isotopie dans une variété, le lien avec les champs de vecteurs et on introduit la notion de dérivée de Lie.

DÉFINITION 2.1. Une *isotopie* de M paramétrée par I est une application $\rho \in \mathcal{C}^\infty(M \times I, M)$ telle que

$$\begin{cases} \rho(\cdot, 0) = \text{Id}_M \\ \forall t \in I, \rho(\cdot, t) \text{ est un difféomorphisme de } M \end{cases} .$$

▷ EXEMPLE. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. L'application $\rho : (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto x + tx_0 \in \mathbb{R}^n$ est une isotopie de \mathbb{R}^n .

◇ NOTATION (*Isotopies et champs de vecteurs*).

- On note $\mathfrak{I}_I(M)$ l'ensemble des isotopies de M paramétrées par I .
- On note $\mathfrak{X}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur M et $\mathfrak{X}_I(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur M dépendant du temps sur I .
- Pour toute $\rho \in \mathfrak{I}_I(M)$ on note

$$v^\rho : \begin{cases} I \times M & \longrightarrow & TM \\ (t, p) & \longmapsto & \frac{d}{ds} (\rho_s(\rho_t^{-1}(p)))|_{s=t} \end{cases} .$$

◇ REMARQUE. Soit $\rho \in \mathfrak{I}_I(M)$. On a $v^\rho \in \mathfrak{X}_I(M)$ et, pour tout $t \in I$,

$$\frac{d\rho_s}{ds}(t, \cdot) = v_t^\rho \circ \rho_t.$$

DÉFINITION 2.2. Soient $v \in \mathfrak{X}_\mathbb{R}(M)$ et $x \in M$.

1. Pour tous $U \subset M$ voisinage ouvert de x , $J \subset I$ intervalle voisinage de 0 dans I et $\rho \in \mathfrak{I}_J(U)$ tels que $v|_{J \times U} = v^\rho$, ρ est appelée *isotopie locale générée* par v au voisinage de x .
2. Une isotopie locale générée par v au voisinage de x définie sur $\mathbb{R} \times M$ est appelée *isotopie générée* par v .

▷ EXEMPLE. Dans \mathbb{R}^2 , l'isotopie générée par $v := \frac{\partial}{\partial x}$ est $\rho : (t, (x, y)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \mapsto (x+t, y) \in \mathbb{R}^2$.

PROPOSITION 2.3 (*Isotopies générées par un champ de vecteurs*).

1. Soient $v \in \mathfrak{X}_I(M)$ et $x \in M$. Il existe une isotopie locale générée par v au voisinage de x .
Deux isotopie locales générées par v au voisinage de x coïncident sur l'intersection de leurs ensembles de définition.
2. Supposons M compacte. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{I}_I(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}_I(M) \\ \rho & \longmapsto & v^\rho \end{array}$$

est bijective.

Preuve 1. Voir [Lee14], théorème 9.11.

2. Voir [Lee14], corollaire 9.17. □

Le premier point de cette dernière proposition permet de définir la dérivée de Lie ci-dessous.

DÉFINITION 2.4. Soient, $k \in \mathbb{N}$, $v \in \mathfrak{X}_I(M)$ et ρ isotopie locale générée par v sur $I \times U$. La *dérivée de Lie* selon v est l'opérateur

$$\mathcal{L}_v : \begin{cases} \Omega^k(U) & \longrightarrow & \Omega^k(U) \\ \omega & \longmapsto & \frac{d}{dt} ((\rho_t)^*\omega) \Big|_{t=0} \end{cases} .$$

▷ EXEMPLE. Soient $v \in \mathfrak{X}_{\mathbb{R}}(M)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. On a

$$\mathcal{L}_v f = v(f).$$

2.2 La formule magique de Cartan

Dans cette partie, on donne trois formules utiles concernant la dérivée de Lie sans en détailler les preuves. Comme exemples, on verra des applications de ces formules dans les preuves de résultats suivant : le théorème 3.1, le théorème 4.1 et la proposition 4.4.

PROPOSITION 2.5 (*La formule de magie de Cartan*). Soient $\omega \in \Omega^k(M)$ et $v \in \mathfrak{X}_{\mathbb{R}}(M)$ tel que, pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, $v_t = v_s$. On a

$$\mathcal{L}_v \omega = \iota_v d\omega + dt_v \omega.$$

Preuve Voir la remarque suivante et [Lee14], théorème 14.35 ou [Silo6], exercice de la partie 6.1. \square

PROPOSITION 2.6. Soit $v \in \mathfrak{X}_{\mathbb{R}}(M)$ et ρ une isotopie locale générée par v paramétrée par I .

1. Soit $\omega \in \Omega^k(M)$. Pour tout $t \in I$,

$$\frac{d}{ds} (\rho_t^* \omega) \Big|_{s=t} = \rho_t^* \mathcal{L}_{v_t} \omega.$$

2. Soit $\omega \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \Omega^k(M))$. Pour tout $t \in I$,

$$\frac{d}{ds} (\rho_t^* \omega_t) \Big|_{s=t} = \rho_t^* \left(\mathcal{L}_{v_t} \omega_t + \frac{d\omega_s}{ds} \Big|_{s=t} \right).$$

Preuve 1. Voir la remarque suivante et [Silo6], exercice de la partie 6.1.

2. Voir [Silo6], proposition 6.4. \square

◇ REMARQUE. On peut utiliser la même méthode pour prouver 2.5 et le point 1. de la proposition 2.6. On commence par montrer que les deux applications définies sur $\Omega(M)$ par chacun des deux membres de l'égalité (vus comme l'image d'une forme ω par ces applications) sont des dérivations de l'algèbre de Lie $(\Omega(M), \wedge)$ qui commutent avec la dérivation extérieure d . Pour conclure, on montre l'égalité sur Ω^k par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$: l'initialisation se fait sur les fonctions $f \in \Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$ et la première étape permet de montrer l'hérédité en écrivant $\omega \in \Omega^{k+1}(M)$ dans une carte locale.

3 Le théorème de Moser

Le théorème ci-dessous introduit une variable temporelle pour étudier le problème de l'existence d'un symplectomorphisme préservant un point. Il s'agit de la première étape

de l'astuce de Moser. Cette méthode fut utilisée par Jürgen Moser en 1965 dans [Mos65] dans la preuve d'un autre théorème.

THÉORÈME 3.1 (de Moser). Soient M une variété compacte et $\omega_0, \omega_1 \in \Omega^2(M)$ deux formes symplectiques de même classe de De Rham $[\omega_0] = [\omega_1]$ telles que, pour tout $t \in [0, 1]$, $\omega_t := (1-t)\omega_0 + t\omega_1$ est symplectique.

Il existe un intervalle ouvert J voisinage de $[0, 1]$ et $\rho \in \mathfrak{I}_J(M)$ telle que, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\rho_t^* \omega_t = \omega_0.$$

Preuve Notons n la dimension de M et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\omega_t := (1-t)\omega_0 + t\omega_1$$

qui est une 2-forme différentielle fermée sur M . Pour toute forme bilinéaire b sur \mathbb{R}^n , on note $\det b$ le déterminant de sa matrice représentative dans la base canonique. L'application

$$f : \begin{cases} M \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto & \det(\omega_t(x)) \end{cases}$$

est continue et, par hypothèse, ne s'annule pas sur $M \times [0, 1]$. Ainsi, il existe $J \subset \mathbb{R}$ intervalle voisinage ouvert de $[0, 1]$ tel que, pour tout $t \in J$, ω_t est une forme symplectique.

Ensuite, remarquons que, pour toute $\rho \in \mathfrak{I}_J(M)$,

$$\begin{aligned} \forall t \in J, \rho_t^* \omega_t = \omega_0 & \stackrel{\rho_0^* \omega_0 = \omega_0}{\Leftrightarrow} \forall t \in [0, 1], \frac{d}{ds}(\rho_s^* \omega_s)|_{s=t} = 0 \\ & \stackrel{\text{proposition 2.6}}{\Leftrightarrow} \forall t \in J, \rho_t^* \left(\mathcal{L}_{v_t} \omega_t + \frac{d\omega_s}{ds} \Big|_{s=t} \right) = 0 \\ & \stackrel{\rho \text{ est une isotopie}}{\Leftrightarrow} \forall t \in J, \mathcal{L}_{v_t} \omega_t + \frac{d\omega_s}{ds} \Big|_{s=t} = 0. \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe $v \in \mathfrak{X}_J(M)$ tel que

$$\forall t \in J, \mathcal{L}_{v_t} \omega_t + \frac{d\omega_s}{ds} \Big|_{s=t} = 0. \quad (*)$$

Comme M est compacte, par la proposition 2.3, il existe $\rho \in \mathfrak{I}_J(M)$ générée par v . Par la remarque ci-dessus, ρ est une isotopie correspondant à l'énoncé du théorème. Ainsi, on a ramené le problème à la recherche d'un tel champ de vecteurs v .

Soit $v \in \mathfrak{X}_J(M)$. Établissons trois égalités.

— Pour tout $t \in J$, $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1$ d'où

$$\frac{d}{ds}(\omega_s)|_{s=t} = \omega_1 - \omega_0.$$

— On a $[\omega_0] = [\omega_1]$ donc il existe $\mu \in \Omega^1(M)$ telle que

$$\omega_1 - \omega_0 = d\mu.$$

— Par la formule magique de Cartan 2.5, pour tout $t \in J$,

$$\mathcal{L}_{v_t} = \iota_{v_t} d\omega_t + dt_{v_t} \omega_t$$

avec, comme ω_t est symplectique, $d\omega_t = 0$.

Ainsi, v vérifie l'équation (*), et seulement si,

$$\forall t \in J, di_{v_t}\omega_t + d\mu = 0.$$

Ainsi, (*) est en particulier vérifiée si

$$\forall t \in J, i_{v_t}\omega_t = -\mu. \quad (**)$$

Or la famille $(\omega_t)_{t \in J}$ est lisse par rapport à $t \in J$ et, pour tout $t \in J$, ω_t est symplectique donc non dégénérée. Ainsi, (**) admet une solution $v \in \mathfrak{X}_J(M)$. Cela prouve le théorème de Moser. \square

- ◇ REMARQUE. En particulier, avec les notations du théorème, il existe φ un difféomorphisme de M tel que $\varphi^*\omega_1 = \omega_0$ (par exemple, ρ_1 convient). L'astuce de Moser répond donc bien au problème introduit dans la sous-partie 1.1.

4 Théorème de Darboux

4.1 Le théorème

Dans cette partie, on prouve le théorème de Moser par l'astuce de Moser et on introduit la notion de carte de Darboux.

- ▷ EXEMPLE. Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ les coordonnées canoniques sur \mathbb{R}^{2n} . La 2-forme

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$$

est une forme symplectique sur la variété \mathbb{R}^{2n} . Le théorème de Darboux 4.1 illustre le grand intérêt de cet exemple simple.

THÉORÈME 4.1 (*de Darboux*). Soient (M, ω) une variété symplectique et $p \in M$. Il existe un système de coordonnées locales $(U, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ en p tel que, sur U ,

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i.$$

Preuve On s'inspire ici de la preuve du théorème 7.4 dans [Silo6]. Comme dans le théorème de Moser 3.1, on applique l'astuce de Moser. Reprenons la notation ω_0 de l'exemple ci-dessus.

Dans un premier temps, on montre qu'on peut se ramener au cas où ω est une forme symplectique au voisinage de 0 dans \mathbb{R}^{2n} qui coïncide avec ω_0 en 0. Soit (U, φ) une carte au voisinage de p . Le poussé en avant $\tilde{\omega}_1 := \varphi_*\omega$ est une forme symplectique sur un voisinage $\tilde{U}_1 \subset \mathbb{R}^{2n}$ de 0. Les deux éléments $\omega_0(0), \tilde{\omega}_1(0)$ sont des formes symplectiques sur \mathbb{R}^{2n} . Ainsi, par le théorème 1.1 de [Silo6], les deux formes bilinéaires $\omega_0(0), \tilde{\omega}_1(0)$ sont équivalentes : il existe $u \in \text{GL}(\mathbb{R}^{2n})$ tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$\omega_0(0)(x, y) = (\tilde{\omega}_1(0))(u(x), u(y)).$$

En notant $U_1 := u^{-1}(\tilde{U}_1)$, U_1 est un voisinage ouvert de 0 et $\tilde{u} := u|_{U_1}$ est un difféomorphisme. Le tiré en arrière $\omega_1 := \tilde{u}^*(\tilde{\omega}_1)$ est une forme symplectique sur U_1 et elle vérifie

$$\omega_0(0) = \omega_1(0).$$

Dans un deuxième temps, on étudie la famille de 2-formes $(t\omega_1 + (1-t)\omega_0)_{0 \leq t \leq 1}$ pour préparer l'astuce de Moser. Comme ω est fermé, ω_1 est fermée. Ainsi, la 2-forme $\omega_1 - \omega_0$ (définie sur U_1) est fermée et, par le lemme de Poincaré, est localement exacte : il existe $U_2 \subset U_1$ voisinage ouvert de 0 et $\mu \in \Omega^1(U_2)$ telle que, sur U_2 ,

$$\omega_1 - \omega_0 = d\mu.$$

Comme ω est symplectique et que u, φ sont des difféomorphismes, ω_1 est symplectique. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\omega_t := t\omega_1 + (1-t)\omega_0$$

est une 2-forme fermée alternée sur U_2 . Reprenons un raisonnement vu dans la preuve du théorème de Moser 3.1. Pour toute forme bilinéaire b sur \mathbb{R}^{2n} , on note $\det b$ le déterminant de sa matrice représentative dans la base canonique. L'application

$$f : \begin{cases} U_2 \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto & \det(\omega_t(0)) \end{cases}$$

est continue. Or $\omega_0(0) = \omega_1(0)$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(0, t) = \det(\omega_0(0)) \neq 0$$

et il existe un voisinage ouvert $U_t \subset U_2$ de 0 et un intervalle I_t voisinage ouvert de t tels que f est non nulle sur $U_t \times I_t$. Comme $[0, 1]$ est compact, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, \dots, t_N \in [0, 1]$ tel que $(I_{t_1}, \dots, I_{t_N})$ est un recouvrement I ouvert de $[0, 1]$. Soit

$$U_3 := \bigcap_{i=1}^N U_{t_i}.$$

La fonction f ne s'annule pas sur $U_3 \times I$. Ainsi, pour tout $t \in I$, ω_t est une forme symplectique sur U_3 .

Dans un troisième temps, on applique l'astuce de Moser à cette famille de formes symplectiques. De même que dans la preuve du théorème de Moser 3.1, pour tout $J \subset I$ intervalle ouvert et pour toute $\rho \in \mathfrak{J}_J(U_3)$,

$$\forall t \in J, \rho_t^* \omega_t = \omega_0 \Leftrightarrow \forall t \in J, di_{v_t} \omega_t + d\mu = 0. \quad (*)$$

Pour tout $t \in I$, ω_t est non dégénérée. Il existe donc $v \in \mathfrak{X}_I(U_3)$ tel que

$$\forall t \in I, i_{v_t} \omega_t = -\mu + \mu(0). \quad (**)$$

En particulier, pour tout $t \in I$, $\omega_t(0)(v_t(0), \cdot) = 0$ donc $v_t(0) = 0$. Ainsi, il existe $U_4 \subset U_3$ (resp. un intervalle $J \subset I$) voisinage ouvert de 0 (resp. de $[0, 1]$) et $\rho \in \mathfrak{J}_J(U_4)$ telle que, sur $[0, 1] \times U_4$, $v = v^\rho$. Or, par l'équation (**),

$$\forall t \in J, di_{v_t} \omega_t + d\mu = 0$$

d'où, par l'équivalence (*),

$$\forall t \in J, \rho_t^* \omega_t = \omega_0.$$

On a en particulier $\rho_1^* \omega_1 = \omega_0$, i.e.

$$\rho_1^* \tilde{u}^* \varphi_* \omega = \omega_0$$

ce qui est un changement de coordonnée tel qu'annoncé dans l'énoncé du théorème. \square

DÉFINITION 4.2. Soient (M, ω) une variété symplectique et $p \in M$. On appelle *carte de Darboux* en p une carte $(U, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ en p telle que, sur U ,

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i.$$

◇ REMARQUES.

- Le théorème de Darboux 4.1 est particulièrement utile dans l'exemple suivant : si l'on prouve une assertion locale invariante par symplectomorphisme sur $(\mathbb{R}^{2n}, dx \wedge dy)$, cette assertion est vraie pour toute variété symplectique de dimension $2n$. Deux variétés symplectiques de même dimension sont localement symplectomorphiques.
- Il existe d'autres preuves du théorème de Darboux 4.1. Le problème 22.19 de [Lee14] en propose une.

Dans la sous-partie suivante, on présente un exemple d'application du théorème avec le calcul d'un flot hamiltonien simple.

4.2 Champs de vecteurs hamiltoniens

Dans cette partie, on définit ce qu'est un champ de vecteur hamiltonien, on en donne un exemple et on donne une formule explicite dans une carte de Darboux.

4.2.1 Définition

Attention, la définition ci-dessous est différent de celle trouvée dans [Silo6] en remplaçant dH par $-dH$.

DÉFINITION 4.3. On appelle fonctions *hamiltoniennes* les éléments de $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$. Un champ de vecteur $v \in \mathfrak{X}(M)$ est *hamiltonien* s'il existe une fonction hamiltonienne H telle que

$$\iota_v \omega = -dH.$$

◇ REMARQUES. Soit H une fonction hamiltonienne.

- Comme ω est non dégénérée, il existe un unique champ de vecteurs hamiltonien associé à H .
- Supposons que M est connexe. Une fonction hamiltonienne \tilde{H} admet le même champ de vecteurs hamiltonien que H si, et seulement si, H et \tilde{H} diffèrent d'une constante.

▷ EXEMPLE. Supposons $(M, \omega) = (\mathbb{R}^2, dx \wedge dy)$. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, le champ de vecteur hamiltonien associé à $H : (x, y) \in M \mapsto x + k \in \mathbb{R}$ est $v^H := \frac{\partial}{\partial y}$.

PROPOSITION 4.4. Soit v un champ vectoriel hamiltonien associé à une fonction H . Soit $\rho \in \mathcal{I}_I(M)$ une isotopie générée par v . L'isotopie ρ préserve ω , préserve H et ses trajectoires sont contenues dans les lignes de niveau de H dans le sens suivant : pour tout $t \in I$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t^* \omega = \omega \\ \rho_t^* H = H \\ \forall x \in M, H(\rho_t(x)) = H(x). \end{array} \right.$$

Preuve Remarquons que, par la formule magique de Cartan 2.5,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_v &= \iota_v d\omega + d\iota_v \omega \\ &= \iota_v 0 + -d(dH) \\ &= 0.\end{aligned}$$

La proposition 2.6 nous donne alors les résultats annoncés. Pour tout $t \in I$,

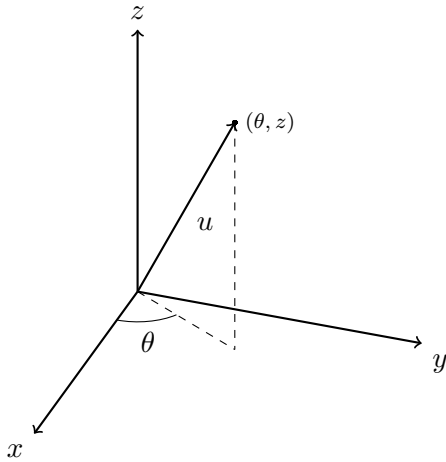
$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(\rho_s^* \omega) \Big|_{s=t} &= \mathcal{L}_v \omega \\ &= 0.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(\rho_s^* H) \Big|_{s=t} &= \mathcal{L}_v H \\ &= 0\end{aligned}$$

avec $\rho_s^* H = H \circ \rho_t$. □

4.2.2 Un exemple



Considérons la sphère unitaire

$$\mathbb{S} := \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \|u\|_2 = 1\}$$

munie en dehors des pôles $(0, 0, \pm 1)$ des coordonnées cylindriques $(r, \theta, z) \in [-1, 1] \times [0, 2\pi[\times [-1, 1]$ telles que tracées sur le schéma. On la munit de la 2-forme ω telle que, pour tous $u \in \mathbb{S}^1$ et $v, w \in T_u \mathbb{S}$,

$$\omega_u(v, w) = \langle u, v \wedge w \rangle.$$

La sous-variété réelle \mathbb{S} de dimension 2 munie de ω est une variété symplectique. On y considère la fonction hamiltonienne

$$H : \begin{cases} \mathbb{S}^1 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto z \end{cases}.$$

Par définition, le champ vectoriel hamiltonien v^H associé à la fonction hamiltonienne H vérifie

$$\iota_{v^H} \omega = -dH$$

i.e., pour tous $u \in \mathbb{S}_1$ et $w \in T_u \mathbb{S}$,

$$\omega_u(v^H(u), w) = -dz(w).$$

Soit $u := (r, \theta, z) \in \mathbb{S}$ tel que $z \neq \pm 1$, i.e. u n'est pas un pôle. On considère l'unique base orthonormée directe (e_r, e_θ, e_z) telle que $e_z = (0, 0, 1)$ et $u = r e_r + z e_z$. Pour tous

$v, w \in T_u\mathbb{S}$ de coordonnées respectives (v_r, v_θ, v_z) et (w_r, w_θ, w_z) dans cette base on a, par définition de ω ,

$$\omega_u(v, w) = r(v_\theta w_z - v_z w_\theta) + z(v_r w_\theta - v_\theta w_r)$$

et, par orthogonalité des couples $(u, v), (u, w)$,

$$\begin{cases} r v_r + z v_z = 0 \\ r w_r + z w_z = 0 \end{cases}$$

d'où

$$\omega_u(v, w) = \frac{1}{r}(v_\theta w_z - v_z w_\theta). \quad (E)$$

Ainsi,

$$v(u) = -r e_\theta.$$

Finalement, en dehors des pôles,

$$v = -\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

4.2.3 Dans une carte de Darboux

Les équations données dans la proposition suivante montrent un intérêt du théorème de Darboux 4.1 en mécanique classique.

PROPOSITION 4.5 (Équations de Hamilton). Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension $2n$, $x \in M$, $(U, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ une carte de Darboux au voisinage de x , H une fonction hamiltonienne et $v \in \mathfrak{X}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n})$ le champ vectoriel hamiltonien associé. On a, sur U ,

$$v = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \right).$$

Preuve Soient $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$ les fonctions coordonnées de v dans la carte de Darboux $(U, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$. On a

$$\iota_v \omega = \sum_{i=1}^n (a_i dy_i - b_i dx_i)$$

et

$$dH = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial H}{\partial y_i} dy_i \right).$$

□

▷ **EXEMPLE.** Reprenons l'exemple de la partie précédente 4.2.2. L'égalité E montre qu'en dehors des pôles

$$\omega = d\theta \wedge dz.$$

Par la proposition 4.5, en dehors des pôles,

$$v^H = -\frac{\partial z}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial z}$$

et on retrouve

$$v^H = -\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

◇ **REMARQUE.** La formule donnée dans la proposition 4.5 correspond aux *équations de Hamilton* connues en physique classique. Dans ce cas, l'espace symplectique (M, ω) correspondant peut être l'espace des phases et la fonction H l'énergie du système.