Colle MP*

Antoine Médoc

Semaine 10

1 Question de connaissances

— Énoncer le théorème de réduction des isométries vectorielles et le théorème spectral.

2 Exercice 1

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle u(x), u(x) \rangle = 0.$$

1. — Montrer que la composée v d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal vérifie
$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle v(x), v(x) \rangle = 0.$$
— Soit $v = h \circ u$. On a $\langle v(x), v(x) \rangle = k^2 \langle u(x), u(y) \rangle = k^2 \langle x, y \rangle$.
2. — Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que
$$\forall x \in E,\ ||u(x)|| = k\,||x||\,.$$
— *Indication : Considérer une base $(e_1, \ldots, e_n)$ orthonormée de E et les vecteurs $e_1 + e_i$ et $e_1 - e_i$.*
Le résultat est clair pour si $n = 1$.
Supposons $n \geqslant 2$. Soient $x := e_1 + e_i$ et $y = e_1 - e_i$. On a $\langle x, y \rangle = 0$ donc $\langle u(x), u(y) \rangle = 0$ donc, avec $k := ||u(e_1)||$ $\langle u(e_i), u(e_i) \rangle = k^2$. Par ailleurs, $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est orthogonale. On a, par le théorème de Pythagore, $||u(x)||^2 = \sum_i x_i^2 \,||u(e_i)||^2 = k^2\,||x||^2$.
3. — Montrer que u est la composée d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal.
— Si $k = 0$, u est la composée de l'homothétie nulle et de l'identité. Supposons $k \neq 0$. Soit h l'homothétie de rapport k et $v := h^{-1} \circ u$. Pour tout x, $||v(x)|| = ||x||$. Donc v est orthogonale.

3 Exercice 2

— La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} := (t \mapsto \cos(nt))_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
— L'application
$$D : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f'' \end{array} \right.$$
est un endomorphisme et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D(e_n) = -n^2 e_n$ donc e_n est un vecteur propre associé à la valeur propre $-n^2$. Ainsi, toute sous-famille finie de $(e_n)_n$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes donc est libre. Donc $(e_n)_n$ est libre.

Énoncé

Question de connaissances

Énoncer le théorème de réduction des isométries vectorielles et le théorème spectral.

Exercice 1

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x,y\rangle \Rightarrow \langle u(x), u(x)\rangle = 0.$$

1. Montrer que la composée v d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal vérifie

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x,y\rangle \Rightarrow \langle v(x), v(x)\rangle = 0.$$

2. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in E,\ ||u(x)|| = k\,||x||\,.$$

3. Montrer que u est la composée d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal.

Exercice 2

La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} := (t \mapsto \cos(nt))_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$?