Colle MP*

Antoine Médoc

Semaine 11

1 Planche 1

1.1 Question de cours

— Énoncer et démontrer la continuité croissante ou décroissante pour une suite d'évènements.

1.2 Application

On note $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geqslant n} A_k$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n := \bigcup_{k\geqslant n} A_k$. Supposons que $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ converge.

— Montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$ et interpréter ce résultat.

— On a, par continuité décroissante, $\mathbb{P}(A) = \lim_n \mathbb{P}(B_n)$. Or, par sous-additivité, $\mathbb{P}(B_n) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) \to 0$.
Interprétation : presque-sûrement, seul un nombre fini des A_n peuvent se produire simultanément.

1.3 Exercices

Exercice 1

On tire simultanément trois cartes au hasard dans un paquet de 32 cartes.

— Quelle est la probabilité de n'obtenir que des coeurs ? que des as ? deux coeurs et un pique ?

— On a

$$p_1 = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{8\times 7\times 6}{32\times 31\times 30} = \frac{7}{620},$$

$$p_2 = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{4\times 3\times 2}{32\times 31\times 30} = \frac{1}{1240},$$

$$p_3 = \frac{\binom{8}{2}\binom{8}{1}}{\binom{32}{3}} = \frac{\frac{1}{2}8\times 7\times 8}{32\times 31\times 30\frac{1}{6}} = \frac{32\times 7}{32\times 31\times 5} = \frac{7}{155}.$$

Exercice 2

Soit $a \in]0,1[$. Un joueur lance une pièce qui fait pile avec la probabilité a. Il marque un point s'il fait pile et deux points s'il fait face. Le jeu s'arrête dès qu'il atteint n points ou plus.

— Quelle est la probabilité p_n de faire n points ?

— Soit le dernier lancer est pile soit il est face, donc par la formule des probabilités totales $p_{n+2} = ap_{n+1} + (1-a)p_n$.
L'équation caractéristique est $r^2 - ar + a - 1$ de discriminant $(a-2)^2$ donc de racines 1 et $a-1$. Donc $p_n = \alpha + \beta(a-1)^n$.
Or $p_1 = a$ et $p_2 = (1-a) + a^2$. Donc $\alpha = \frac{1}{2-a}$ et $\beta = \frac{1-a}{2-a}$.

2 Planche 2

2.1 Question de cours

— Donner la définition d'un système d'évènements complet. Énoncer et démontrer la formule de Bayes.

2.2 Application

Dans une forêt, il y a 30% de chênes, 50% de noisetiers et 20% de hêtres et aucun autre arbre. Une maladie touche 10% des chênes, 4% des noisetiers et 25% des hêtres.
— Sachant qu'un arbre est malade, quelle est la probabilité que ce soit un chêne ?
— Par la formule de Bayes,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C|M^+) &= \frac{\mathbb{P}(M^+|C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(M^+|C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(M^+|N)\mathbb{P}(N) + \mathbb{P}(M^+|H)\mathbb{P}(H)} \\ &= \frac{0,1 \times 0,3}{0,1 \times 0,3 + 0,04 \times 0,5 + 0,25 \times 0,2} \\ &= 0,3.\end{aligned}$$

2.3 Exercices

Exercice 1

On considère un texte de n lettres dans un alphabet $\{x_1, \dots, x_m\}$. Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on note n_i le nombre de x_i dans le texte.
— Je tire deux lettres au hasard dans ce texte. Quelle est la probabilité p de tomber sur deux lettres identiques ?
— On a, comme en considérant des évènements disjoints "tirer deux fois x_i",

$$\begin{aligned}p &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\binom{n_i}{2}}{\binom{n}{2}} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i(n_i-1)}{n(n-1)}\end{aligned}$$

Exercice 2

On effectue une série de lancers avec une pièce qui fait pile avec la probabilité $2/3$. Soit X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir pour la première fois deux piles consécutifs. Soit $a_n := P(X = n)$.
— Calculer a_n.
— On note F_i (resp. P_i) le fait de faire face (resp. pile) au lancer i. On a $a_1 = 0$ et $a_2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = 4/9$.

Soit $n \geqslant 3$. On a $\mathbb{P}(F_1 \cap (X = n)) = \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(X = n | X = n) = \frac{1}{3}a_{n-1}$ et, comme $n \geqslant 3$, $\mathbb{P}(P_1 \cap (X = n)) = \mathbb{P}(P_1 \cap F_2 \cap (X = n)) = \mathbb{P}(P_1 \cap F_2)\mathbb{P}(X = n | \mathbb{P}_1 \cap F_2) = \frac{2}{3}\frac{1}{3}a_{n-2}$. Ainsi, par la formule des probabilités totales, $a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{2}{9}a_{n-2}$.
L'équation caractéristique est $r^2 - \frac{1}{3}r - \frac{2}{9} = 0$ de discriminant 1 donc de racines $-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$.
On a $a_n = \alpha(-1/3)^n + \beta(2/3)^n$. Avec a_1, a_2 on a $\alpha = 4/3$ et $\beta = 2/3$.

3 Planche 3

3.1 Question de cours

— Définir la loi uniforme, la loi de Bernoulli, la loi géométrique et la loi de Poisson ($X(\Omega)$ et $\mathbb{P}(X = k)$).

3.2 Application

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois binomiales $B(m, p)$ et $B(n, p)$.

— Quelle est la loi de $X + Y$?

— On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X + Y = k) &= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = k - i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} p^i (1-p)^{m-i} \binom{n}{k-i} p^{k-i}(1-p)^{n-k+i} \\ &= p^k (1-p)^{m+n-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} \\ &= \binom{m+n}{k} p^k (1-p)^{m+n-k}.\end{aligned}$$

Donc $X + Y$ suit $B(m + n, p)$.

3.3 Exercices

Exercice 1

On considère $E := \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et on tire au hasard un élément M de cet espace de matrices.

1. — Quelle est la probabilité que M soit diagonale ? triangulaire supérieure mais non diagonale ? triangulaire inférieure mais non diagonale ? pas triangulaire ?
   — Les quatres évènements contiennent 4 matrices sur 16 donc ont une probabilité de 1/4.
2. — Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?
   — Si M est diagonale, elle est diagonalisable, donc il y en a 4 sur 4. Si elle est triangulaire mais non diagonale, elle est diagonalisable si et seulement si ses coefficients diagonaux sont différents, donc il y en a 4 sur 8. Si elle n'est pas triangulaire, $\chi = X^2 - (a + d)X - 1$ de discriminant $(a + d)^2 + 4 > 0$ donc M est diagonalisable, donc il y en a 4 sur 4. Donc on a une probabilité de $\frac{4+4+4}{16} = 3/4$.

Exercice 2

Une urne contient n boule numérotées de 1 à n. On effectue des tirages avec remise. On note X le numéro du premier tirage tel que le numéro est supérieur ou égal à celui du tirage précédent.

1. — Quelles sont les valeurs possibles pour X ?
   — Il faut au moins deux tirages donc $X \geqslant 2$. Si $X = k$, on a obtenu une suite strictement croissante lors des $k-1$ premiers tirages donc $k-1$ nombres différents donc $k-1 \leqslant n$. Donc $X \leqslant n+1$. Pour $k \in [\![2, n+1]\!]$, la suite $n, n-1, \ldots, n-k+1, n$ donne $X = k$. Donc les valeurs possibles sont $[\![2, n+1]\!]$.
2. — Soit $k \in [\![0, n+1]\!]$. Calculer $\mathbb{P}(X \geqslant k)$.
   — Une seule suite réalise $X = n+1$ et $\mathbb{P}(X \geqslant n+1) = \mathbb{P}(X = n+1) = \frac{1}{n^n}$.
   L'évènement $X = k$ est réalisé si les $k-1$ premiers numéros sont dans l'ordre strictement décroissants. Il y a $\binom{n}{k-1}$ choix de telles suites et chacune a une probabilité $\frac{1}{n^{k-1}}$ de sortir. Donc $\mathbb{P}(X \geqslant k) = \binom{n}{k-1}\frac{1}{n^{k-1}}$.