Colle MP*

Antoine Médoc

Semaine 13 (2 janvier 2023)

1 Planche 1

1.1 Question de cours

— Énoncer et démontrer le théorème chinois "version morphisme".

1.2 Application

— Les anneaux $\mathbb{Z}_{72} \times \mathbb{Z}_{84}$ et $\mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{168}$ sont-ils isomorphes ?
— On a $72 = 8 \times 9$, $84 = 4 \times 3 \times 7$ et $36 = 4 \times 9, 8 \times 3 \times 7$. Par le théorème chinois, les deux anneaux sont isomorphes.

1.3 Exercices

Exercice 1

Soit $(C_i)_{i \in I}$ un ensemble de convexes.

1. — L'intersection et l'union de cette famille sont-elles convexes ?
   — Oui pour l'intersection.
   Non pour l'union : $[0, 1]$, $[2, 3]$.
2. — Montrer que, si l'intersection est non vide, l'union est connexe par arcs.
   — On relie chaque point à un point de l'intersection.

Exercice 2

Soit I un intervalle réel et $f : I \to \mathbb{R}$ injective et continue. Soit

$$C := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x > y\right\}$$

et

$$F : \left|\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f(x) - f(y) \end{array}\right. .$$

1. — Montrer que $F(C)$ est un intervalle.
   — L'ensemble C est convexe et F est continue, donc $F(C)$ est un connexe de $\mathbb{R}$.
2. — Montrer que f est monotone.
   — Comme f est injective $0 \notin I$ donc $I \subset \mathbb{R}_-^*$ ou $I \subset \mathbb{R}_+^*$.

2 Planche 2

2.1 Question de cours

— Définir la fonction indicatrice d'Euler φ. Calculer $\varphi(ab)$ et $\varphi(p^k)$.

2.2 Application

— Quel est le cardinal de l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}_{78}$?
— On a $\varphi(78) = \varphi(2 \times 3 \times 13) = 1 \times 2 \times 12 = 24$.

2.3 Exercices

Exercice 1

Soient A et B connexes par arcs.

1. — Montrer que les ensembles $A \times B$ et $A + B$ sont connexes par arcs.
   — Pour le produit, on prend le couple des chemins. Pour la somme, $(a, b) \mapsto a + b$ est continue.
2. — L'intérieur $\overset{\circ}{A}$ est-il nécessairement connexe par arcs ?
   — Non. Dans $\mathbb{R}^2$, $A := B(0, 1) \cup [1, 2] \times \{0\} \cup B(3, 1)$.

Exercice 2

1. — Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe par arcs.
   — Soient $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Si le segment $[x, y]$ contient 0, on passe par un troisième point.
2. — Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.
   — Soit f un homéomorphisme. Si on retire un point, on a une contradiction.
3. — Montrer que $[0, 1]$ et $\mathbb{S}^1$ ne sont pas homéomorphes.
   — Soit f un homéomorphisme. On retire $1/2$ de $[0, 1]$.

3 Planche 3

3.1 Question de cours

— Donner les éléments irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

3.2 Application

— Donner la décomposition en facteurs irréductibles de $X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
— On a $X^4 + 1 = (X - e^{i\pi/4})(X - e^{3i\pi/4})(X - e^{5i\pi/4})(X - e^{7i\pi/4}) = (X^2 - 2\mathrm{Re}(e^{i\pi/4})X + 1)(X^2 - 2\mathrm{Re}(e^{3i\pi/4})X + 1) = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$.

3.3 Exercices

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel réel normé.

1. — La boule unité fermée et la sphère unité $\mathbb{S}$ sont-elles convexes ? Connexes par arcs ?

— La boule unité est convexe par l'inégalité triangulaire.
En dimension 1, la sphère unité n'est pas connexe par arcs. Supposons $\dim E \geqslant 2$. Soient $x, y \in \mathbb{S}$. Si $x \neq -y$, on pose

$$\gamma : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & \frac{(1-t)x+ty}{||(1-t)x+ty||} \end{array} \right. .$$

Supposons $x = -y$. Comme $\dim E \geqslant 2$, il existe $z \in \mathbb{S}$ tel que (x, z) est libre. Comme $x = -y$, (y, z) est libre. Par le cas précédent, il existe un chemin de x à z et de z à y, donc de x à y.

Exercice 2

Soient I un intervalle ouvert réel et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Soient $A := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x < y\right\}$ et

$$g : \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \end{array} \right. .$$

1. — Montrer que $g(A)$ est connexe.
   — On a A convexe et g continue.
2. — Montrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
   — Par le théorème des accroissements finis, $g(A) \subset f'(I)$.
   Soit $z := f'(a) \in f(I)$. Soit $(b_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a par valeurs supérieures. On a $g(a, b_n) \in g(A)$ et $g(a, b_n) \to f'(a)$ donc $z \in \overline{g(A)}$.
3. — Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.
   — Soient a, b les bornes de $g(A)$. On a $]a, b[\subset f'(I) \subset [a, b]$ donc $f'(I)$ est un intervalle d'extrémités a, b.

4 Exercices supplémentaires

Exercice 1

— L'ensemble $A := \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{Q}^2$ est-il connexe par arcs ?
—

Exercice 2

— Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'idéaux de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que cette suite est stationnaire.
—