Colle MP*

Antoine Médoc

Semaine 2 (19 septembre 2022)

1 Planche 1

1.1 Question de cours

— Montrer que $\mathbb{N}^2$, et plus généralement le produit cartésien de deux ensembles dénombrables, est dénombrable.

1.2 Application

— Indiquer, parmi les ensembles suivants, ceux qui sont dénombrables ou non : $\mathbb{Q}$, $\mathcal{D}$ l'ensemble des décimaux, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels.

— On a une surjection $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$ donc $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
On a $\mathbb{N} \subset \mathcal{D} \subset \mathbb{Q}$ donc $\mathcal{D}$ est dénombrable.
L'ensemble $[0,1]$ est non dénombrable et $(x_n)_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} x_n 2^{-n} \in [0,1]$ est surjective donc $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.
On a une bijection $P \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mapsto \mathbf{1}_P \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ donc $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}_n[X] \simeq \mathbb{Q}^{n+1}$ donc $\mathbb{Q}_n[X]$ est dénombrable. Or $\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n0} \mathbb{Q}_n[X]$ donc $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable.

1.3 Exercices

Exercice 1

1. — On a admet la formule $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que la famille $\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ est sommable et calculer sa somme.
   — Par le critère de Riemann, la famille $(1/n^2)_{n\geqslant 1}$ est sommable donc $\left(\frac{(-1)}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable. On a, en sommant par paquets, avec $S_0 := \sum_{n\in 2\mathbb{N}} \frac{(-1)}{n^2}$ et $S_1 := \sum_{n\in 2\mathbb{N}+1} \frac{(-1)}{n^2}$, $\sum_{n1} \frac{(-1)}{n^2} = S_0 + S_1$. On a $S_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2} = \frac{\pi^2}{24}$. Or $S_0 - S_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)}{n^2} = 2S_0 - \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{6} = -\frac{\pi^2}{12}$.
2. — Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et, pour tout $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $a_{m,n} := \frac{1}{(m+n)^\alpha}$. La famille $(a_{m,n})_{m,n}$ est-elle sommable ?
   — Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $I_p := \left\{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \;\middle|\; m+n = p\right\}$ et on a $\sum_{(m,n)\in I_p} a_{m,n} = \frac{p-1}{p^\alpha}$. Or, par le critère de Riemann, $\sum_{p\in\mathbb{N}^*} \frac{p-1}{p^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha - 1 > 1$ i.e. $\alpha > 2$. Donc, par le théorème de sommation par paquets, $(a_{m,n})_{m,n}$ est sommable si, et seulement si, $\alpha > 2$.

Exercice 2

1. — L'ensemble F des parties finies de $\mathbb{N}$ est-il dénombrable ?
   — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n := \mathcal{P}(\llbracket 0, n \rrbracket)$ fini (de cardinal 2^{n+1}). On a $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ donc F est au plus dénombrable. La fonction $n \in \mathbb{N} \mapsto \{n\} \in F$ est injective donc F est infini. Donc F est dénombrable.
2. — L'ensemble I des parties infinies de $\mathbb{N}$ est-il dénombrable ?
   — On a $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = F \cup I$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Or $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable et F est dénombrable, donc I n'est pas dénombrable.
3. — L'ensemble F_C des parties de $\mathbb{N}$ dont le complémentaire est fini est-il dénombrable ?
   — L'application $A \in F \mapsto \mathbb{N} \backslash A \in F_C$ est une bijection involutive et F est dénombrable, donc F_C est dénombrable.
4. — L'ensemble I_C des parties infinies de $\mathbb{N}$ dont le complémentaire est infini est-il dénombrable ?
   — On a $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = F \cup F_C \cup I_C$. Or F et F_C sont dénombrables et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable, donc I_C n'est pas dénombrable.

2 Planche 2

2.1 Question de cours

— Montrer que le support d'une famille sommable est dénombrable.

2.2 Application

— Indiquer, parmi les familles suivantes, lesquelles sont sommables et calculer leur somme : $(e^{-x^2})_{x \in [1,+\infty[}$, $(1/x^2)_{x \in \mathbb{Q} \cap]0,+\infty[}$, $\left(\frac{(-1)}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

— Le support de $(e^{-x^2})_{x \in [1,+\infty[}$ n'est pas dénombrable donc elle n'est pas sommable.
La famille $(n^2)_{n1}$ n'est pas sommable et est une sous-famille de $(1/x^2)_{x \in \mathbb{Q} \cap]0,+\infty[}$ donc cette dernière n'est pas sommable.
La famille $(1/2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable donc $\left(\frac{(-1)}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable. On a, en sommant par paquets, avec $S_0 := \sum_{n \in 2\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2^n}$ et $S_1 := \sum_{n \in 2\mathbb{N}+1} \frac{(-1)^n}{2^n}$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2^n} = S_0 + S_1$. Or $S_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{1-1/4} = 4/3$ et $S_1 = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2p+1}} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2p}} = -2/3$. Ainsi $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2^n} = 4/3 - 2/3 = 2/3$.
La série harmonique ne converge pas donc $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n1}$ n'est pas sommable.

2.3 Exercices

Exercice 1

On appelle ensemble des nombres algébriques $A := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \exists P \in \mathbb{Q}[X] \backslash \{0\}, P(z) = 0 \right\}$.

1. — Montrer que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable.
   — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}_n[X] \simeq \mathbb{Q}^{n+1}$ donc $\mathbb{Q}_n[X]$ est dénombrable. Or $\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n0} \mathbb{Q}_n[X]$ donc $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable.
2. — Montrer que A est dénombrable.
   — On a $\mathbb{Q} \subset A$ donc A est infini. De plus, en notant $Z(P)$ les racines complexes d'un polynôme P, $A = \bigcup_{P \in \mathbb{Q}[X]} Z(P)$ donc A est au plus dénombrable. Donc A est dénombrable.

3. — Quel est le cardinal de l'ensemble des nombres complexes non algébriques ?
   — L'ensemble $\mathbb{C}$ n'est pas dénombrable et A est dénombrable, donc $\mathbb{C} \setminus A$ est infini non dénombrable.

Exercice 2

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

1. — La famille $(z^{|k|})_{k \in \mathbb{Z}}$ est-elle sommable ? Si oui, calculer sa somme.
   — On a $\mathbb{Z} = \mathbb{N}^* \sqcup \mathbb{Z}^-$. Or $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} |z|^{|k|}$ et $\sum_{k \in \mathbb{Z}^-} |z|^{|k|} = \sum_{k=0}^{+\infty} |z|^k$ sont convergentes comme sommes de séries géométriques de raison $|z| < 1$. Donc $(z^{|k|})_{k \in \mathbb{Z}}$ est sommable et $\sum_{k \in \mathbb{Z}} z^{|k|} = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} z^{|k|} + \sum_{k \in \mathbb{Z}^-} z^{|k|} = \sum_{k=1}^{+\infty} z^k + \sum_{k=0}^{+\infty} z^k = 2 \times \frac{1}{1-z} - 1 = \frac{1+z}{1-z}$.
2. — Montrer que $(z^{pq})_{p,q \in \mathbb{N}^*}$ est sommable.
   — Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\sum_q |z|^{pq}$ converge et $\sum_{q=1}^{+\infty} |z|^{pq} = |z|^p \frac{1}{1-|z|^p} \sim |z|^p$. Or $\sum_p |z|^p$ converge donc $\sum_p \sum_{q=1}^{+\infty} |z|^{pq}$ converge. Donc $(z^{pq})_{p,q \in \mathbb{N}^*}$ est sommable et $\sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} z^{pq} = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{z^p}{1-z^p}$.
3. — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $d(n)$ le nombre de ses diviseurs dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} d(n) z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$.
   — On a $\sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} z^{pq} = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{z^p}{1-z^p}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n := \left\{(k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2 \;\middle|\; kl = n\right\}$. En sommant par paquets, $\sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} z^{pq} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(k,l) \in I_n} z^{kl} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\operatorname{Card} I_n) z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) z^n$.

3 Exercices supplémentaires

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $u_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

1. — Étudier la sommabilité de la famille $(u_n)_n$ et la convergence de la série de terme général u_n.
   — On a $|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{n^{1/2}}$ donc, par le critère de Riemann, $(u_n)_n$ n'est pas sommable. La suite $(u_n)_n$ est alternée et $(|u_n|)_n$ est décroissante donc, par le critère spécial des séries alternées, $\sum_n u_n$ converge.
2. — Montrer que, pour tout $x \in [a,b]$, $(x-a)(x-b) \leqslant (b-a)^2$.
   — Soit $x \in [a,b]$. On a $0 \leqslant x - a \leqslant b - a$ et $0 \leqslant b - x \leqslant b - a$.
3. — Montrer que le produit de Cauchy de la série $\sum_n u_n$ par elle-même est divergent.
   — Ce produit de Cauchy est la série de terme général $w_n := \sum_{p+q=n} u_p u_q = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p+1}} \frac{(-1)^{n-p}}{\sqrt{n-p+1}} = (-1)^n \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(p+1)(n-p+1)}}$. On a donc $|w_n| = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(p+1)(n-p+1)}}$. Or $(p+1)(n-p+1) \leqslant (n+1-(-1))^2$ donc $|w_n| \geqslant \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \to 1$. Donc le produit de Cauchy $\sum_n w_n$ diverge grossièrement.

Exercice 2

Soit I un ensemble. On dit qu'une famille $(u_i)_i \in \mathbb{R}^I$ est de carré sommable si $(u_i^2)_i$ est sommable. On note l^2 l'ensemble des familles réelles indexées par I de carré sommable.

1. — Soit $(u_i)_i \in \mathbb{R}^I$ sommable. Est-elle de carré sommable ?
   — Il existe $K > 0$ tel que, pour toute partie J finie de I, $\sum_{i \in J} |u_i| \leqslant K$. Soit $M := \left\{i \in I \;\middle|\; |u_i| > 1\right\}$. Si M est infinie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe J_n une partie de M de

cardinal n et $n < \sum_{i \in J_n} |u_i| \leqslant K$, ce qui est absurde. Donc M est finie. Donc $(u_i)_{i \in M}$ est sommable.
Pour tout $i \in I \backslash M$, $|u_i|^2 \leqslant |u_i|$. Or $(u_i)_{i \in I \backslash M}$ est sommable, donc $(u_i^2)_{i \in I \backslash M}$ est sommable. Finalement, $(u_i)_i$ est de carré sommable.

2. — Soient $(u_i)_i, (v_i)_i \in l^2$. La famille $(u_i v_i)_i$ est-elle sommable ? La famille $(u_i v_j)_{(i,j) \in I^2}$ est-elle nécessairement sommable ?
   — Pour tout $i \in I$, $|u_i v_i| \leqslant \frac{1}{2}(|u_i|^2 + |v_i|^2)$ donc $(u_i v_i)_i$ est sommable.
   Contre-exemple : $I = \mathbb{N}$ et $(u_n)_n = (v_n)_n = \left(\frac{1}{n+1}\right)_n \in l^2$.

3. — Montrer que l^2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$.
   — Pour tout $i \in I$, $|u_i + v_i|^2 \leqslant (|u_i| + |v_i|)^2 = |u_i|^2 + 2\,|u_i v_i| + |v_i|^2$.