Colle MP*

Antoine Médoc

Semaine 3 (26 septembre 2022)

1 Planche 1

1.1 Question de cours

— Énoncer et démontrer le théorème de Leibniz sur les séries alternées.

1.2 Application

— Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.
— Si $\alpha \leqslant 0$, $\sum_n u_n$ diverge grossièrement. Si $\alpha > 0$, $(|u_n|)_n$ est décroissante et $(u_n)_n$ est alternée donc, par le théorème de Leibniz, $\sum_n u_n$ converge.

1.3 Exercices

Exercice 1

1. — Montrer que la série de terme général $u_n := \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2^n+n^2}{n!}$ converge.
   — La série de terme général $\frac{1}{2^{n+1}}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$ donc elle converge. Par ailleurs, $\frac{2^n+n^2}{n!} \sim \frac{2^n}{n!}$ et, par croissance comparée, $\sum_n \frac{2^n}{n!}$ converge donc $\sum_n \frac{2^n+n^2}{n!}$ converge. Ainsi, $\sum_n u_n$ converge.
2. — Soit $x \in \mathbb{R}$. Rappeler la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.
   — On a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$
3. — Calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.
   — On a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$ (série géométrique) et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$ (série exponentielle). Par ailleurs, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e^1 + e^1 = 2e$. Ainsi, par linéarité, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1 + e^2 + 2e$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $u_n := \frac{(-1)^n}{n+\cos n}$.

1. — Étudier l'absolue convergence de $\sum_n u_n$.
   — On a $|u_n| \geqslant \frac{1}{n+1}$ donc $\sum_n u_n$ n'est pas absolument convergente.
2. — Étudier la nature de $\sum_n u_n$ en réalisant un développement asymptotique.
   — On a $\frac{(-1)^n}{n \cos n} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1 + \frac{\cos n}{n}\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{n}(1 + O(1/n)) = \frac{(-1)^n}{n} + O(1/n^2)$. Or, par le théorème de Leibniz, $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente et, par le critère de Riemann, $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge. Ainsi, $\sum_n u_n$ converge.

3. — Étudier la nature de la série de terme général u_n par le critère spécial des séries alternées.
   — La suite $(u_n)_n$ est alternée et $|u_n| = \frac{1}{n+\cos n} \to 0$. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x + \cos x \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - \sin x \geqslant 0$ donc $(n + \cos n)_n$ est croissante, donc $(|u_n|)_n$ est décroissante. Donc, par le théorème de Leibniz, $\sum_n u_n$ converge.

2 Planche 2

2.1 Question de cours

— Énoncer et démontrer le critère de convergence des séries de Riemann.

2.2 Application

— Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$?

— On a $u_n = \frac{n}{n^{3/2}\sqrt{1+1/n^3}} \sim \frac{1}{n^{1/2}}$. Or, par le critère de Riemann, $\sum_n \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge. Donc $\sum_n u_n$ diverge.

2.3 Exercices

Exercice 1

1. — Étudier la convergence de la série de terme général $u_n := \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.
   — On a $|u_n| = -\ln(1-1/n^2) \sim \frac{1}{n^2}$. Or, par le critère de Riemann, $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum_n u_n$ converge absolument donc converge.
2. — Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln n$.
   — On a $u_n = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right) = \ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln n$.
3. — Calculer la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$.
   — Soit $p \geqslant 2$. On a $S_p := \sum_{n=2}^{p} u_n = \sum_{n=2}^{p} \ln(n+1) - \ln n + \sum_{n=2}^{p} \ln(n-1) - \ln n = \ln(p+1) - \ln 2 + \ln 1 - \ln p = -\ln 2 + \ln(1+1/p) \to -\ln 2$. Donc $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = -\ln 2$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $u_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

1. — Étudier la convergence absolue et la convergence de la série de terme général u_n.
   — On a $|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{n^{1/2}}$ donc, par le critère de Riemann, $\sum_n u_n$ ne converge pas absolument.
   La suite $(u_n)_n$ est alternée et $(|u_n|)_n$ est décroissante donc, par le critère spécial des séries alternées, $\sum_n u_n$ converge.
2. — Montrer que, pour tout $x \in [a, b]$, $(x-a)(x-b) \leqslant (b-a)^2$.
   — Soit $x \in [a, b]$. On a $0 \leqslant x - a \leqslant b - a$ et $0 \leqslant b - x \leqslant b - a$.
3. — Montrer que le produit de Cauchy de la série par elle-même est divergent.
   — Ce produit de Cauchy est la série de terme général $w_n := \sum_{p+q=n} u_p u_q = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p+1}} \frac{(-1)^{n-p}}{\sqrt{n-p+1}} = (-1)^n \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(p+1)(n-p+1)}}$. On a donc $|w_n| = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(p+1)(n-p+1)}}$. Or $(p+1)(n-p+1) \leqslant (n+1-(-1))^2$ donc $|w_n| \geqslant \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \to 1$. Donc le produit de Cauchy $\sum_n w_n$ diverge grossièrement.

3 Planche 3

3.1 Question de cours

— Énoncer et démontrer la règle de d'Alembert.

3.2 Application

— Étudier la nature de la série de terme général $v_n := \frac{\binom{2n}{n}}{2^n}$.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2n+1}{n+1} \to 2 > 1$. Par le théorème de d'Alembert, la série $\sum_n v_n$ diverge grossièrement.

3.3 Exercice

Exercice 1

1. — Étudier la nature de la série de terme général $\frac{\ln n}{n}$.
   — Pour tout $n \geqslant 3$, $\frac{\ln n}{n} \geqslant \frac{1}{n}$. Or la série harmonique diverge, donc $\sum_n \frac{\ln n}{n}$ diverge.
2. — Étudier la nature de la série de terme général $u_n := \int_{n-1}^{n} \frac{\ln t}{t} dt - \frac{\ln n}{n}$.
   — La fonction $f : t \in [1, +\infty[\mapsto \frac{\ln t}{t} \in \mathbb{R}$ est positive et dérivable. Pour tout $t \geqslant 1$, $f'(t) = \frac{1-\ln t}{t^2}$ donc f est décroissante sur $[e, +\infty[$.
   Pour tout $n \geqslant 4$, $f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)dt \leqslant f(n-1)$ donc $0 \leqslant u_n \leqslant f(n-1) - f(n)$. Or $f(n) \to 0$ par croissance comparée, donc la série de terme général $f(n-1) - f(n)$ converge. Donc la série de terme général $(u_n)_n$ converge.
3. — Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k} = \frac{1}{2}(\ln n)^2 + c + o(1)$.
   — La série de terme général u_n converge donc il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=2}^{n} u_k = s + o(1)$. Or $\sum_{k=2}^{n} u_k = \int_1^n \frac{\ln t}{t} dt - \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k}$ et $\int_1^n \frac{\ln t}{t} dt = \left[\frac{1}{2} \ln^2 t\right]_1^n = \frac{1}{2}(\ln n)^2$, donc $\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k} = \frac{1}{2}(\ln n)^2 - s + o(1)$. Donc $c = -s$ convient.

Exercice 2

1. — On a admet la formule $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que la série de terme général $u_n := \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente et calculer sa somme.
   — Par le critère de Riemann, la famille $(1/n^2)_{n \geqslant 1}$ est sommable donc $\left(\frac{(-1)}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable. On a, en sommant par paquets, avec $S_0 := \sum_{n \in 2\mathbb{N}} \frac{(-1)}{n^2}$ et $S_1 := \sum_{n \in 2\mathbb{N}+1} \frac{(-1)}{n^2}$, $\sum_{n1} \frac{(-1)}{n^2} = S_0 + S_1$. On a $S_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2} = \frac{\pi^2}{24}$. Or $S_0 - S_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ donc $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)}{n^2} = 2S_0 - \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{6} = -\frac{\pi^2}{12}$.
2. — Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et, pour tout $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $a_{m,n} := \frac{1}{(m+n)^\alpha}$. La famille $(a_{m,n})_{m,n}$ est-elle sommable ?
   — Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $I_p := \left\{(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \;\middle|\; m + n = p\right\}$ et on a $\sum_{(m,n) \in I_p} a_{m,n} = \frac{p-1}{p^\alpha}$. Or, par le critère de Riemann, $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{p-1}{p^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha - 1 > 1$ i.e. $\alpha > 2$. Donc, par le théorème de sommation par paquets, $(a_{m,n})_{m,n}$ est sommable si, et seulement si, $\alpha > 2$.

4 Exercices supplémentaires

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. — Pour tout $x > -1$, montrer que $\ln(1+x) \leqslant x$.
   — Soit $f : x \in]-1+\infty[\mapsto x - \ln(1+x) \in \mathbb{R}$. Pour tout $x > -1$, $f'(x) = \frac{x}{1+x}$ dont f atteint son minimum en 0. Donc, pour tout $x > -1$, $f(x)f(0) = 0$ d'où l'inégalité recherchée.
2. — On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par $\forall n \geqslant 1$, $u_n := H_n - \ln n$ et $v_n := u_n - 1/n$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
   — On a $u_n - v_n = 1/n \to 0$. Pour tout n, $u_n - u_{n+1} = -\frac{1}{n+1} - \ln n + \ln(n+1) = -\frac{1}{n+1} - \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geqslant 0$ donc $(u_n)_n$ est décroissante. Pour tout n, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant 0$ donc $(v_n)_n$ est croissante. Ainsi $(u_n)_n$
3. — Montrer qu'il existe $\gamma > 0$ tel que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.
   — Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes donc convergent vers une limite commune γ. On a $\gamma \geqslant v_2 = 1 - \ln 2 > 0$. De plus, $u_n = \gamma + o(1)$, i.e. $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

Exercice 2

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels strictement positifs. Soient $\alpha_0, \alpha_1 > 0$ et $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ l'unique suite définie par $\forall n \geqslant 1, \alpha_{n+1} = \alpha_n + a_n\alpha_{n-1}$.

— Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_n)_n$ pour que la suite $(\alpha_n)_n$ converge.

— Par une récurrence directe, $(\alpha_n)_n$ est à termes strictement positifs. Elle est de plus croissante à partir du rang 1, donc elle converge ou diverge vers $+\infty$.
  Supposons que $(\alpha_n)_n$ converge vers $l \in \mathbb{R}$. On a $l \geqslant \alpha_1 > 0$. Ainsi $a_n = \frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{\alpha_{n-1}} \sim \frac{1}{l}(\alpha_{n+1} - \alpha_n)$. Or $\sum_n \alpha_{n+1} - \alpha_n$ est convergente et à terme général positif donc, par comparaison, $\sum_n a_n$ converge.
  Réciproquement, supposons que $\sum_n a_n$ converge. En particulier, $a_n = o(1)$ et $\alpha_{n+1} - \alpha_n = a_n\alpha_{n-1} = o(\alpha_{n-1})$. Or $(\alpha_n)_n$ est croissante donc $\alpha_{n+1} - \alpha_n = o(\alpha_n)$ donc $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1 + o(1) \sim 1$. Ainsi, $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - 1 = a_n\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \sim a_n$ et $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - 1 \sim \ln\left(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right) = \ln\alpha_{n+1} - \ln\alpha_n$ d'où $a_n \sim \ln\alpha_{n+1} - \ln\alpha_n$. Donc $\sum_n \ln\alpha_{n+1} - \ln\alpha_n$ converge, donc $(\ln\alpha_n)_n$ converge, donc $(\alpha_n)_n$ converge par continuité de exp.