Colle MP*

Antoine Médoc

Semaine 5 (10 octobre 2022)

1 Planche 1

1.1 Question de cours

— Montrer que toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre. Montrer que toute famille de sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est en somme directe.

1.2 Application

— Montrer que $\mathbb{R}_n[X] = \bigoplus_{k=0}^{n} \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \;\middle|\; XP' = kP \right\}$.
— Soit

$$u : \left| \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ \mathbb{R}_n[X] & \longmapsto & XP' \end{array} \right. .$$

Elle est bien définie et linéaire. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $u(X^k) = kX^k$ donc k est valeur propre de u et $\left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \;\middle|\; XP' = kP \right\}$ est le sous-espace propre associé. Ainsi, u admet $n+1$ valeurs propres distinctes donc il est diagonalisable et $\mathbb{R}_n[X]$ est la somme directe de ses sous-espaces propres.

1.3 Exercices

Exercice 1

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on note

$$M(a,b) := \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

1. — Soit $A := M(0,1)$. Montrer que A est diagonalisable et donner P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.
   — On a $\chi_A = (X-2)(X+1)^2$. On a $\mathrm{Ker}(A+\mathrm{I}_3) = \{x+y+z=0\} = \mathrm{Vect}\,\{(1,-1,0),(1,0,-1)\}$ et $\mathrm{Ker}(A-2\,\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}\,\{(1,1,1)\}$. Donc A est diagonalisable et

   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   convient : $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(-1,-1,2)$.
2. — Calculer $P^{-1}M(a,b)P$ en fonction de a et b.

— On a $M(a,b) = a\,\mathrm{I}_3 + bA$ donc $P^{-1}AP = a\,\mathrm{I}_3 + b\,\mathrm{diag}(-1,-1,2) = \mathrm{diag}(a-b, a-b, a+2b)$.

3. — En déduire le déterminant et le spectre de $M(a,b)$.
   — Deux matrices semblables ont même déterminant et spectre donc $\det M(a,b) = (a+2b)(a-b)^2$ et le spectre de $M(a,b)$ est $\{a+2b, a-b\}$.

Exercice 2

Soit $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que χ_D est scindé à racines simples.

— L'équation $X^3 - 3X = D$ d'inconnue $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ admet-elle un nombre fini de solutions ?

— Comme χ_D est scindé à racines simples, D est diagonalisable et chacun de ses espaces propres est une droite. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de D. On a

$$P^{-1}DP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Soit X une solution de l'équation. On a $XD = X^4 - 3X^2 = XD$ donc X commute avec D donc X stabilise tous les espaces propres de D. Ainsi, $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de vecteurs propres de X donc on peut écrire

$$P^{-1}XP = \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_n).$$

On a $P^{-1}(X^3 - 3X)P = \mathrm{diag}(x_1^3 - 3x_1, \dots, x_n^3 - 3x_n)$ donc, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $x_i^3 - x_i = \lambda_i$. Finalement,

$$\left\{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \;\middle|\; X^3 - 3X = D\right\} \subset \left\{P\,\mathrm{diag}(x_1, \dots, x_n)P^{-1} \;;\; \forall i, x_i^3 - 3x_i = \lambda_i\right\}.$$

Or, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $X^3 - 3X - \lambda_i$ admet un nombre fini de racines donc ce deuxième ensemble est fini. Donc l'équation $X^3 - X = D$ admet un nombre fini de solutions dans $M_n(\mathbb{K})$.

2 Planche 2

2.1 Question de cours

— Donner la définition du polynôme caractéristique d'une matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Quel est son degré d ? Donner ses coefficients de degré d, $d-1$ et 0.

2.2 Application

— Deux matrices d'ordre 2 ayant la même trace et le même déterminant sont-elles nécessairement semblables ? Deux matrices carrées d'ordre 2 ayant la même trace t et le même déterminant d vérifiant $t^2 - 4d \neq 0$ sont-elles semblables ?

— Les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ont la même trace 2 et le même déterminant 1 mais ne sont pas semblables. Le polynôme caractéristique de deux telles matrices est $\chi = X^2 - tX + d$ et est de déterminant $\Delta = t^2 - d$. Si $\Delta \neq 0$, il est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc les matrices sont diagonalisables et ont même valeurs propres, donc elles sont semblables.

2.3 Exercices

Exercice 1

Soit

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. — Montrer que A est diagonalisable. Donner ses valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres associés.
   — On a $\chi_A = X(X-2)(X-4)$. Il est scindé à racines simples donc ses valeurs propres sont $0, 2, 4$ et tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1.
2. — Soit M commutant avec A. Montrer que M est diagonalisable dans une même base que A.
   — Comme M commute avec A, les sous-espaces propres de A sont stables par M. Or, ce sont des droites. Ainsi, toute base de vecteurs propres de A est aussi une base de vecteurs propres de M.
3. — En déduire le nombre de matrices B telles que $A = B^2$.
   — Soit e_1, e_2, e_3 une base de vecteurs propres (associés respectivement à 0,2,4) de A et $P = \operatorname{Mat}(e_1, e_2, e_3)$.
   Soit B telle que $B^2 = A$. On a $BA = B^3 = AB$ donc B commute avec A. Il existe $\Delta := \operatorname{diag}(a, b, c)$ telle que $\Delta = P^{-1}BP$. Or $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(0, 2, 4)$ donc $\operatorname{diag}(a^2, b^2, c^2) = \operatorname{diag}(0, 2, 4)$, i.e $a = 0$, $b = \pm\sqrt{2}$, $c = \pm 2$.
   Réciproquement, si $B := P^{-1} \operatorname{diag}(0, \pm\sqrt{2}, \pm 2)$, $B^2 = A$. Donc il existe 4 telles matrices B.

Exercice 2

— La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} := (t \mapsto \cos(nt))_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

— L'application

$$D : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f'' \end{array} \right.$$

est un endomorphisme et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D(e_n) = -n^2 e_n$ donc e_n est un vecteur propre associé à la valeur propre $-n^2$. Ainsi, toute sous-famille finie de $(e_n)_n$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes donc est libre. Donc $(e_n)_n$ est libre.

3 Planche 3

3.1 Question de cours

— Quelle est la condition classique nécessaire et suffisante sur le polynôme caractéristique d'une matrice pour qu'elle soit diagonalisable ? Le prouver.

3.2 Application

— La matrice

$$A := \begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

est-elle trigonalisable/diagonalisable ?

— On a, en calculant par blocs, $\chi_A = (X-1)((X+3)(X-4)+12) = X(X-1)^2$. Il est scindé donc A est trigonalisable. La matrice $A-\mathrm{I}_3$ est de rang 2, donc $\dim \operatorname{Ker}(A-\mathrm{I}_3) = 1 < 2$. Donc A n'est pas diagonalisable.

3·3 Exercices

Exercice 1

Soit

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (X-1)(X-2)P' - 2XP \end{array} \right. .$$

1. — Montrer que φ est un endomorphisme et déterminer le degré de ses vecteurs propres.
   — Comme $\mathbb{R}[X]$ est un anneau, φ est bien définie. Par bilinéarité du produit et linéarité de la dérivation, φ est linéaire. Soit $P \neq 0$, d son degré et $a \neq 0$ sont coefficient dominant. On a $\deg(\varphi(P)) \leqslant d+1$ et le coefficient de $\varphi(P)$ de degré $d+1$ est $a(d-2)$. Par contraposée, un vecteur propre de φ est de degré d tel que $d-2=0$, i.e. $d=2$.
2. — Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par φ et que $(1, X-1, (X-1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   — Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Le coefficient de degré $2+1$ de $\varphi(P)$ est 0 donc $\deg \varphi(P) \leqslant 2$.
   La famille $(1, X-1, (X-1)^2)$ est échelonnée en degré, donc est libre. Elle est de cardinal $\dim \mathbb{R}_2[X]$ donc en est une base.
3. — Écrire la matrice M représentative de l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ induit par φ dans la base $(1, X-1, (X-1)^2)$.
   — On a
   $$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$
4. — Déterminer les éléments propres de φ.
   — Par la question (1), les sous-espaces propres de φ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$, donc les valeurs propres de φ sont celles de la matrice M, donc $\operatorname{Sp} \varphi = \{2, -3, -4\}$.
   Comme M a trois valeurs propres distinctes, ses sous-espaces propres sont des droites. On a vu que $E_{-4}(\varphi) = \operatorname{Vect}\{(X-1)^2\}$. On a $E_{-3}(M) = \operatorname{Vect}(0,-1,1)$ donc $-(X-1)+(X-1)^2 = (X-1)(X-2)$ dirige $E_{-3}(\varphi)$. De même, $E_2(M) = \operatorname{Vect}\{(1,-2,1)\}$ donc $1-2(X-1)+(X-1)^2 = (X-2)^2$ dirige $E_2(\varphi)$.

Exercide 2

Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telles que B est inversible.

— Les matrices AB et BA ont-elles nécessairement les mêmes valeurs propres ?

— On a $\chi_{AB}(0) = \det(-AB) = (-1)^n(\det A)(\det B) = \det(-BA) = \chi_{BA}(0)$ et, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\chi_{AB}(\lambda) = \det(\lambda\,\mathrm{I}_n - AB) = \det(B^{-1}\lambda I_n B - B^{-1}BAB) = \det(\lambda\,\mathrm{I}_n - BA)$. Donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. En particulier, AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

4 Exercices supplémentaires

Exercice 1

Soit u un automorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

— Donner le spectre de u^{-1} en fonction de celui de u.

— Comme u et u^{-1} sont des injectifs, ils ont un noyau nul, i.e. n'admettent pas 0 comme valeur propre. Pour tout $\mu \in \mathbb{K}^*$,

$$\begin{aligned}\mu \in \mathrm{Sp}(u^{-1}) &\Leftrightarrow \exists x \in E\setminus\{0\}, u^{-1}(x) = \mu x \\ &\Leftrightarrow \exists x \in E\setminus\{0\}, u(x) = \mu^{-1} x & \Leftrightarrow \mu \in \mathrm{Sp}(u)\end{aligned}$$

donc $\mathrm{Sp}(u^{-1}) = \{\mu^{-1} \;;\; \mu \in \mathrm{Sp}(u)\}$.

Exercice 2

Soit $J \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

— Montrer que J est diagonalisable, donner ses valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres associés.

— On a $\mathrm{rg}\, J = 1$ donc 0 est valeur propre de J et $\dim E_0 = n-1$. On a, avec $e_1 := (1, \dots, 1)$, $Je_1 = ne_1$ donc 1 est valeur propre et $\dim E_n \geqslant 1$. Donc $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(J)} \dim E_\lambda \geqslant n-1+1 = n$ donc J est diagonalisable et $\dim E_n = 1$.