Colle MP*

Antoine Médoc

Semaine 6 (17 octobre 2022)

1 Planche 1

1.1 Question de cours

— Montrer que deux normes sont équivalentes si et seulement si toute partie bornée pour l'une est bornée pour l'autre.

1.2 Application

Soit $E := \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{K})$ et

$$N : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & |f(0)| + \int_0^1 |f'| \end{array} \right. .$$

— Montrer que N est bien définie et est une norme sur E.

— Pour toute $f \in E$, f' est continue donc intégrable sur $[0,1]$ donc N est bien définie.
Par positivité de l'intégrale, N est positive. Si $N(f) = 0$, $f(0) = 0$ et $\int_0^1 |f| = 0$ donc, f' étant continue, $f(0) = 0$ et $f' = 0$ donc $f = 0$. Donc N est définie-positive.
Par linéarité de la dérivée et de l'intégrale, N est homogène.
Par linéarité de la dérivation, par inégalité triangulaire du module et par croissance de l'intégrale, N vérifie l'inégalité triangulaire.

1.3 Exercices

Exercice 1

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $e_n := e^{in\theta}$.

1. — Supposons $\theta = \pi$. Expliciter les suites extraites $(e_{2n})_n$ et $(e_{2n+1})_n$.
   — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_{2n} = 1$ et $e_{2n+1} = -1$.
2. — À quelle condition sur θ la suite $(e_n)_n$ converge-t-elle ?
   — Il s'agit d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta}$ de module 1. Ainsi, $(e_n)_n$ converge si, et seulement si, $e^{i\theta} = 1$. Or $\theta \in [0, 2\pi[$ donc $(e_n)_n$ converge si, et seulement si, $\theta = 0$.
3. Soit $\theta \in]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$.
   (a) — Montrer que la suite $(u_n)_n := (\cos(n\theta))_n$ converge si, et seulement si, $v_n := (\sin(n\theta))_n$ converge.
   — Supposons que $(u_n)_n$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin\theta$ d'où $v_n = \frac{1}{\sin\theta}(u_n \cos\theta - u_{n+1})$. Donc $(v_n)_n$ converge.
   Réciproquement, supposons que $(v_n)_n$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\sin\theta + \sin(n\theta)\cos(\theta)$ d'où $u_n = \frac{1}{\sin\theta}(v_{n+1} - v_n \cos\theta)$. Donc $(u_n)_n$ converge.

(b) — Les suites $(\cos(n\theta))_n$ et $(\sin(n\theta))_n$ sont elles convergentes ou divergentes ?
— On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n = u_n + iv_n$. Or $(e_n)_n$ diverge donc, par contraposée, $(u_n)_n$ ou $(u_n)_n$ diverge. Donc $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ divergent.

Exercice 2

1. — Étudier la convergence de la série de terme général $u_n := \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.
   — On a $|u_n| = -\ln(1-1/n^2) \sim \frac{1}{n^2}$. Or, par le critère de Riemann, $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum_n u_n$ converge absolument donc converge.
2. — Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln n$.
   — On a $u_n = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right) = \ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln n$.
3. — Calculer la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$.
   — Soit $p \geqslant 2$. On a $S_p := \sum_{n=2}^{p} u_n = \sum_{n=2}^{p} \ln(n+1) - \ln n + \sum_{n=2}^{p} \ln(n-1) - \ln n = \ln(p+1) - \ln 2 + \ln 1 - \ln p = -\ln 2 + \ln(1+1/p) \to -\ln 2$. Donc $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = -\ln 2$.

2 Planche 2

2.1 Question de cours

— Comparer les normes $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ et $||\cdot||_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.
— Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$,

$$\begin{cases} ||x||_\infty \leqslant ||x||_1 \leqslant n\,||x||_\infty \\ ||x||_\infty \leqslant ||x||_2 \leqslant \sqrt{n}\,||x||_\infty \\ ||x||_2 \leqslant ||x||_1 \leqslant \sqrt{n}\,||x||_2 \end{cases}.$$

2.2 Application

Soit $E :=_n (\mathbb{K})$ et

$$N : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \max_{1\leqslant j\leqslant n} \left\{\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|\right\} \end{array}\right. .$$

— Montrer que N est une norme sur E.
— Un maximum de sommes de nombres positifs est positif, donc N est positive. Si $N(A) = 0$, la norme 1 de chacune des colonnes de A est nulle, donc A est nulle. Donc N est définie-positive.
Par linéarité de la somme, N est homogène.
Par l'inégalité triangulaire de $||\cdot||_1$ sur $\mathbb{K}^n$, N vérifie l'inégalité triangulaire.

2.3 Exercices

Exercice 1

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'unique suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_{n+1} := \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$.

1. — Étudier la suite $(z_n)_n$ dans le cas où $z_0 \in \mathbb{R}$.
   — Si $z_0 \geqslant 0$, $(z_n)_n$ est constante égale à z_0. Si $z_0 < 0$, $(z_n)_n$ est constante égale à 0 à partir du rang $n = 1$.
2. Supposons $z_0 \notin \mathbb{R}$.

   (a) — Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\rho_n > 0$ et $\theta_n \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$ tels que $z_n = \rho_n e^{i\theta_n}$.

— Par récurrence sur n, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $z_n \notin \mathbb{R}$. En particulier, z_n est de module non nul et d'argument non congru à 0 modulo π.

(b) — Montrer que $(\rho_n)_n$ converge vers un réel $\rho \geqslant 0$.
— On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \rho_n \frac{e^{i\theta_n}+1}{2} = \rho_n e^{i\theta_n/2} \cos(\theta_n)$ d'où $\rho_{n+1} = \rho_n |\cos(\theta/2)| \leqslant \rho_n$. La suite $(\rho_n)_n$ est décroissante et positive donc converge vers un réel $\rho \geqslant 0$.

(c) — Montrer que $(z_n)_n$ converge.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $e^{i\theta_{n+1}} = e^{i\theta_n/2}$ donc $\theta_{n+1} \equiv \theta_n/2 \mod 2\pi$. Or $\theta_{n+1}, \theta_n/2 \in]-\pi, \pi[$ donc $\theta_{n+1} = \theta_n/2$. Ainsi la suite $(\theta_n)_n$ est géométrique de raison $1/2 \in]-1, 1[$ donc converge vers 0. Donc la suite $(z_n)_n$ converge vers $\rho \times 1 = \rho$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $u_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

1. — Étudier la convergence absolue et la convergence de la série de terme général u_n.
   — On a $|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{n^{1/2}}$ donc, par le critère de Riemann, $\sum_n u_n$ ne converge pas absolument.
   La suite $(u_n)_n$ est alternée et $(|u_n|)_n$ est décroissante donc, par le critère spécial des séries alternées, $\sum_n u_n$ converge.
2. — Montrer que, pour tout $x \in [a, b]$, $(x-a)(x-b) \leqslant (b-a)^2$.
   — Soit $x \in [a, b]$. On a $0 \leqslant x - a \leqslant b - a$ et $0 \leqslant b - x \leqslant b - a$.
3. — Montrer que le produit de Cauchy de la série par elle-même est divergent.
   — Ce produit de Cauchy est la série de terme général $w_n := \sum_{p+q=n} u_p u_q = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p+1}} \frac{(-1)^{n-p}}{\sqrt{n-p+1}} = (-1)^n \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(p+1)(n-p+1)}}$. On a donc $|w_n| = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(p+1)(n-p+1)}}$. Or $(p+1)(n-p+1) \leqslant (n+1-(-1))^2$ donc $|w_n| \geqslant \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \to 1$. Donc le produit de Cauchy $\sum_n w_n$ diverge grossièrement.

3 Planche 3

3.1 Question de cours

— Montrer que deux normes sont équivalentes si et seulement si toute suite convergente pour l'une est convergente pour l'autre et de même limite pour l'autre.

3.2 Application

Soit $E := \mathcal{C}^0([0, 1])$, $\varphi \in E$ à valeurs strictement positives et

$$N : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_0^1 \varphi\,|f| \end{array} \right. .$$

— Montrer que N est bien définie et est une norme sur E.
— Par positivité de l'intégrale, N est positive. Si $N(f) = 0$, $\varphi\,|f|$ étant continue, $\varphi\,|f|$ est nulle et, comme $\varphi > 0$, $f = 0$. Donc N est définie-positive.
Par bilinéarité du produit et linéarité de l'intégrale, N est homogène.
Par l'inégalité triangulaire du module et par croissance de l'intégrale, N vérifie l'inégalité triangulaire.

3.3 Exercices

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. — Pour tout $x > -1$, montrer que $\ln(1+x) \leqslant x$.
   — Soit $f : x \in]-1+\infty[\mapsto x - \ln(1+x) \in \mathbb{R}$. Pour tout $x > -1$, $f'(x) = \frac{x}{1+x}$ dont f atteint son minimum en 0. Donc, pour tout $x > -1$, $f(x) f(0) = 0$ d'où l'inégalité recherchée.
2. — On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par $\forall n \geqslant 1$, $u_n := H_n - \ln n$ et $v_n := u_n - 1/n$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
   — On a $u_n - v_n = 1/n \to 0$. Pour tout n, $u_n - u_{n+1} = -\frac{1}{n+1} - \ln n + \ln(n+1) = -\frac{1}{n+1} - \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geqslant 0$ donc $(u_n)_n$ est décroissante. Pour tout n, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant 0$ donc $(v_n)_n$ est croissante. Ainsi $(u_n)_n$
3. — Montrer qu'il existe $\gamma > 0$ tel que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.
   — Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes donc convergent vers une limite commune γ. On a $\gamma \geqslant v_2 = 1 - \ln 2 > 0$. De plus, $u_n = \gamma + o(1)$, i.e. $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

Exercice 2

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'unique suite telle que $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. — Étudier la convergence et l'éventuelle limite de la suite $(u_n)_n$.
   — Par une récurrence directe, la suite $(u_n)_n$ est à termes positifs. On a donc, pour tout n, $u_{n+1} \leqslant u_n$, i.e. $(u_n)_n$ est décroissante. Comme $(u_n)_n$ est décroissante et minorée par 0, elle converge vers un réel $l \geqslant 0$. Par continuité de exp, $le^{-l} = l$ donc $l = 0$ ou $e^{-l} = 1$, i.e. $l = 0$.
2. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $v_n := \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$. Montrer que $(v_n)_n$ converge vers 1.
   — On a $v_n = \frac{1-e^{u_n}}{u_n e^{-u_n}} \sim \frac{u_n}{u_n} = 1$. Donc $v_n \to 1$.
3. — Rappeler le théorème de Cesàro. Donner un équivalent de la suite $(u_n)_n$.
   — On rappelle que, si $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ converge vers $a \in \mathbb{C}$, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_n \to a$. On applique ce résultat à la suite $(v_n)_n$: $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k \to 1$. Or $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0}\right)$ avec $\frac{1}{u_n} \to +\infty$ donc $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k \sim \frac{1}{nu_n}$. Ainsi, $\frac{1}{nu_n} \to 1$, i.e. $u_n \sim \frac{1}{n}$.

4 Exercices supplémentaires

Exercice 1

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels strictement positifs. Soient $\alpha_0, \alpha_1 > 0$ et $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ l'unique suite définie par $\forall n \geqslant 1, \alpha_{n+1} = \alpha_n + a_n \alpha_{n-1}$.

— Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_n)_n$ pour que la suite $(\alpha_n)_n$ converge.

— Par une récurrence directe, $(\alpha_n)_n$ est à termes strictement positifs. Elle est de plus croissante à partir du rang 1, donc elle converge ou diverge vers $+\infty$.
Supposons que $(\alpha_n)_n$ converge vers $l \in \mathbb{R}$. On a $l \geqslant \alpha_1 > 0$. Ainsi $a_n = \frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{\alpha_{n-1}} \sim \frac{1}{l}(\alpha_{n+1} - \alpha_n)$. Or $\sum_n \alpha_{n+1} - \alpha_n$ est convergente et à terme général positif donc, par comparaison, $\sum_n a_n$ converge.
Réciproquement, supposons que $\sum_n a_n$ converge. En particulier, $a_n = o(1)$ et $\alpha_{n+1} - \alpha_n = a_n \alpha_{n-1} = o(\alpha_{n-1})$. Or $(\alpha_n)_n$ est croissante donc $\alpha_{n+1} - \alpha_n = o(\alpha_n)$ donc $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1 + o(1) \sim 1$. Ainsi, $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - 1 = a_n \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \sim a_n$ et $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - 1 \sim \ln\left(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right) = \ln \alpha_{n+1} - \ln \alpha_n$ d'où

$a_n \sim \ln \alpha_{n+1} - \ln \alpha_n$. Donc $\sum_n \ln \alpha_{n+1} - \ln \alpha_n$ converge, donc $(\ln \alpha_n)_n$ converge, donc $(\alpha_n)_n$ converge par continuité de exp.

Exercice 2

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ convergente.

— Montrer que $(u_n)_n$ est stationnaire à partir d'un certain rang.

— La suite $(u_{n+1} - u_n)_n$ converge vers 0 donc il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant 1/2$. Or, pour tout n, $|u_{n+1} - u_n| \in \mathbb{N}$. Donc, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_{n+1} - u_n| = 0$, i.e. $u_{n+1} = u_n = u_{n_0}$.

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $u_n := \frac{(-1)^n}{n+\cos n}$.

1. — Étudier l'absolue convergence de $\sum_n u_n$.
   — On a $|u_n| \geqslant \frac{1}{n+1}$ donc $\sum_n u_n$ n'est pas absolument convergente.
2. — Étudier la nature de $\sum_n u_n$ en réalisant un développement asymptotique.
   — On a $\frac{(-1)^n}{n\cos n} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1 + \frac{\cos n}{n}\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{n}(1 + O(1/n)) = \frac{(-1)^n}{n} + O(1/n^2)$. Or, par le théorème de Leibniz, $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente et, par le critère de Riemann, $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge. Ainsi, $\sum_n u_n$ converge.
3. — Étudier la nature de la série de terme général u_n par le critère spécial des séries alternées.
   — La suite $(u_n)_n$ est alternée et $|u_n| = \frac{1}{n+\cos n} \to 0$. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x + \cos x \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - \sin x \geqslant 0$ donc $(n + \cos n)_n$ est croissante, donc $(|u_n|)_n$ est décroissante. Donc, par le théorème de Leibniz, $\sum_n u_n$ converge.