Colle MP*

Antoine Médoc

Semaine 7 (7 novembre 2022)

1 Planche 1

1.1 Question de cours

— Définir la notion de valeur d'adhérence "avec des ε", énoncer et démontrer la caractérisation avec des suites extraites, énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

1.2 Application

— Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $(u_n)_n$ une suite bornée d'éléments de E. Montrer que $(u_n)_n$ converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

— Si $(u_n)_n$ converge, toute suite extraite est convergente et de même limite donc $(u_n)_n$ admet une unique valeur d'adhérence.
Supposons que $(u_n)_n$ admet une valeur d'adhérence l mais ne converge pas vers l : il existe $\varepsilon > 0$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists n_0 \geqslant n, ||u_n - l|| \geqslant \varepsilon$. Ainsi, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ extractrice telle que, pour tout n, $\left|\left|u_{\varphi(n)} - l\right|\right| \geqslant \varepsilon$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, $(u_{\varphi(n)})_n$ admet une valeur d'adhérence $l' \neq l$. Donc $(u_n)_n$ admet deux valeurs d'adhérence distinctes l et l'.

1.3 Exercices

1.3.1 Exercice 1

Soit $E := \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{K})$ et

$$N : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & |f(0)| + \int_0^1 |f'| \end{array} \right. .$$

— Montrer que N est bien définie et est une norme sur E.

— Pour toute $f \in E$, f' est continue donc intégrable sur $[0,1]$ donc N est bien définie.
Par positivité de l'intégrale, N est positive. Si $N(f) = 0$, $f(0) = 0$ et $\int_0^1 |f| = 0$ donc, f' étant continue, $f(0) = 0$ et $f' = 0$ donc $f = 0$. Donc N est définie-positive.
Par linéarité de la dérivée et de l'intégrale, N est homogène.
Par linéarité de la dérivation, par inégalité triangulaire du module et par croissance de l'intégrale, N vérifie l'inégalité triangulaire.

1. — Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f_n : x \in [0,1] \mapsto \frac{1}{n}\sin(\pi n x) \in \mathbb{R}$. Calculer $N(f_n)$ et $||f_n||_\infty$.
   — On a $||f_n||_\infty = \frac{1}{n}\max_{[0,n\pi]} \sin = \frac{1}{n}$ et $N(f_n) = 0 + \int_0^1 \pi\,|\cos(n\pi x)|\,dx \overset{u=n\pi x}{=} \frac{1}{n}\int_0^{n\pi} |\cos| = \frac{n}{n}\int_0^{\pi} |cos| = 2\int_0^{\pi/2} \cos = 2$.
2. — Les normes N et $||\cdot||_\infty$ sont-elles équivalentes ? L'espace vectoriel E est-il de dimension finie ?

— La suite $(f_n)_n$ converge vers 0 pour $||\cdot||_\infty$ et ne converge pas vers 0 pour N, donc ces deux normes ne sont pas équivalentes. Par contraposée, E n'est pas de dimension finie.

3. — Montrer que $||\cdot||_\infty \leqslant N$.
   — Soit $f \in E$. Pour tout $x \in [0,1]$, $|f(x)| \leqslant |f(0)| + \int_0^x |f'| \leqslant |f(0)| + \int_0^1 |f'| = N(f)$. Ainsi, $||f||_\infty \leqslant N(f)$.

1.3.2 Exercice 2

Soit E un espace vectoriel normé.

1. *Question intermédiaire.*
   — Soit F un sous-espace vectoriel de E et $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset F$. Montrer que $F = E$.
   — Soit $x \in E$. On a $\frac{r}{2||x||}x \in B(0,r) \subset F$ donc, comme F est un espace vectoriel, $x \in F$. Donc $E = F$.
2. — Soit F un sous-espace vectoriel de E. Donner $\mathring{F}$.
   — Si $F = E$, $\mathring{F} = F = E$. Sinon, $\mathring{F} = \emptyset$.

2 Planche 2

2.1 Question de cours

— Énoncer et démontrer la caractérisation séquentielle de l'adhérence.

2.2 Application

— Soit $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqslant x \leqslant y, x^2+y^2 < 1\right\}$. Dire si D est fermée et donner son adhérence.

— Soit $(x,y) \in \bar{D}$. Par passage à la limite, $x \leqslant y$ et $x^2 + y^2 \leqslant$. Donc $\bar{D} \subset A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqslant x \leqslant y, x^2+y^2 \leqslant 1\right\}$.
Soit $(x,y) \in A$. La suite $\left(\frac{n}{n+1}x, \frac{n}{n+1}y\right)$ est dans D et converge vers (x,y) donc $(x,y) \in \bar{D}$.
Finalement, $\bar{D} = A$ et $(0,1) \in \bar{D} \backslash D$ donc D n'est pas fermée.

2.3 Exercices

2.3.1 Exercice 1

Soit $E := \mathcal{C}^0([0,1])$ et, pour toute $\varphi \in E$,

$$N_\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_0^1 \varphi\,|f| \end{array} \right. .$$

1. — Soit $\varphi \in E$ telle que $\varphi > 0$ sur $]0,1]$. Montrer que N_φ est bien définie et est une norme sur E. Donner un exemple de fonction φ telle que N_φ ne soit pas une norme.
   — Par positivité de l'intégrale, N_φ est positive. Si $N_\varphi(f) = 0$, $\varphi\,|f|$ étant continue, $\varphi\,|f|$ est nulle et, comme $\varphi > 0$ sur $]0,1]$, $f = 0$ sur $]0,1]$: par continuité de f en 0, $f = 0$. Donc N_φ est définie-positive.
   Par bilinéarité du produit et linéarité de l'intégrale, N_φ est homogène.
   Par l'inégalité triangulaire du module et par croissance de l'intégrale, N_φ vérifie l'inégalité triangulaire.

Si $\varphi = 0$, N_φ n'est pas définie-positive donc n'est pas une norme.

2. — Soient $\varphi, \psi \in E$ à valeurs strictement positives. Montrer que N_φ et N_ψ sont équivalentes.
   — Les fonctions φ, ψ sont continues sur un intervalle donc atteignent leurs bornes. On note $M > 0$ le maximum de φ et $m > 0$ le minimum de ψ. Pour toute $f \in E$, $\varphi\,|f| \leqslant Mf \leqslant M\frac{1}{m}\psi f$ d'où $N_\varphi(f) \leqslant \frac{M}{m}N_\psi(f)$. De même, avec M' le maximum de ψ et m' le minimum de φ, $N_\psi(f) \leqslant \frac{M'}{m'}N_\varphi(f)$.

3. — Soient $\varphi : t \in [0,1] \mapsto t \in \mathbb{R}$ et $\psi : t \in [0,1] \mapsto t^2 \in \mathbb{R}$. Montrer que N_φ et N_ψ ne sont pas équivalentes en étudiant la suite $(f_n)_n := \left(t \in [0,1] \mapsto e^{-nt} \in \mathbb{R}\right)_n$.
   — Les fonctions φ et ψ sont bien des éléments de E strictement positifs sur $]0,1]$. Pour tout n, f_n est bien un élément de E.
   On a $N_\varphi(f_n) = \int_0^1 te^{-nt}dt = \left[-\frac{e^{-nt}}{n}t\right]_0^1 + \frac{1}{n}\int_0^1 e^{-nt}dt = -\frac{e^{-n}}{n} + \frac{1}{n^2}(1-e^n) \sim \frac{1}{n^2}$.
   On a $N_\psi(f) = \int_0^1 t^2e^{-nt}dt = \left[-\frac{e^{-nt}}{n}t^2\right]_0^1 + \frac{2}{n}\int_0^1 te^{-nt}dt = o(1/n^3) + \frac{2}{n}N_\varphi(f) \sim \frac{2}{n^3}$.
   Finalement, $\frac{N_\varphi(f_n)}{N_\psi(f_n)} \sim \frac{n}{2} \to +\infty$ donc N_φ et N_ψ ne sont pas équivalentes.

4. — L'espace vectoriel E est-il de dimension finie ?
   — Par contraposée, E n'est pas de dimension finie.

2.3.2 Exercice 2

Soient E un espace vectoriel normé, $a, b \in E$ et $r, R > 0$.

— Montrer que $||b-a|| \leqslant R - r \Leftrightarrow \bar{B}(a,r) \subset \bar{B}(b,R)$.

— Supposons que $||b-a|| \leqslant R-r$. Soit $x \in \bar{B}(a,r)$. On a $||b-x|| \leqslant ||b-a|| + ||a-x|| \leqslant R - r + r = R$, donc $x \in \bar{B}(b,R)$.
  Supposons $\bar{B}(a,r) \subset \bar{B}(b,R)$. Soit $x := a - \frac{r}{||b-a||}(b-a)$. On a $x \in \bar{B}(a,r)$, donc $x \in \bar{B}(b,R)$. Or $||x-b|| =$ Donc $\left|\left|\left(-1 - \frac{r}{||b-a||}\right)(b-a)\right|\right| = ||b-a|| + r$. Donc $||b-a|| \leqslant R - r$.