Colle MP*

Antoine Médoc

Semaine 9

1 Planche 1

1.1 Question de cours

— Montrer l'existence et unicité de l'endomorphisme adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.

1.2 Application

— Soit $u : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (3x + 2y, y - x) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer son adjoint.

— Dans la base canonique, $M(u) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, donc $M(u^*) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, donc $u^* : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (3x - y, 2x + y) \in \mathbb{R}^2$.

1.3 Exercices

Exercice 1

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\langle x, y\rangle \Rightarrow \langle u(x), u(x)\rangle = 0$.

1. — Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x, ||u(x)|| = k\,||x||$. *Indication : Considérer une base* $(e_1, \ldots, e_n)$ *orthonormée de* E *et les vecteurs* $e_1 + e_i$ *et* $e_1 - e_i$.
   — Le résultat est clair pour si $n = 1$.
   Supposons $n \geqslant 2$. Soient $x := e_1+e_i$ et $y = e_1-e_i$. On a $\langle x, y\rangle = 0$ donc $\langle u(x), u(y)\rangle = 0$ donc, avec $k := ||u(e_1)||$ $\langle u(e_i), u(e_i)\rangle = k^2$. Par ailleurs, $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est orthogonale. On a, par le théorème de Pythagore, $||u(x)||^2 = \sum_i x_i^2 \,||u(e_i)||^2 = k^2\,||x||^2$.
2. — Montrer que u est la composée d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal.
   — Si $k = 0$, u est la composée de l'homothétie nulle et de l'identité. Supposons $k \neq 0$. Soit h l'homothétie de rapport k et $v := h^{-1} \circ u$. Pour tout x, $||v(x)|| = ||x||$. Donc v est orthogonale.
3. — Montrer que la composée v d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal vérifie $\langle x, y\rangle \Rightarrow \langle v(x), v(x)\rangle = 0$.
   — Soit $v = h \circ u$. On a $\langle v(x), v(x)\rangle = k^2\,\langle u(x), u(y)\rangle = k^2\,\langle x, y\rangle$.

2 Planche 2

2.1 Question de cours

— Montrer que l'application $u \mapsto u^*$ est linéaire, antimultiplicative et involutive.

2.2 Application

— Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\operatorname{Ker} u^* = \operatorname{Im}(u)^\perp$ et $\operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp$.

— On a $x \in \operatorname{Ker} u^* \Leftrightarrow \forall y \in E \; \langle u^*(x), y \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall y, \langle x, u(x) \rangle = 0$ donc $\operatorname{Ker} u^* = \operatorname{Im}(u)^\perp$. On a donc $\operatorname{Ker} u = (\operatorname{Im} u^*)^\perp$ i.e. $\operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp$.

2.3 Exercices

Exercice 1

Soient $u \in \mathcal{O}(E)$, $v = u - \operatorname{Id}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k.$$

1. — Montrer que $\operatorname{Ker} v = (\operatorname{Im} v)^\perp$ et $\operatorname{Im} v = (\operatorname{Ker} v)^\perp$.
   — Il suffit de montrer la première égalité et de passer à l'orthogonal.
   Soit $x \in \operatorname{Ker} v$, i.e. $u(x) = x$. Soit $y := v(z) \in \operatorname{Im} v$. On a $\langle x, y \rangle = \langle x, u(z) \rangle - \langle x, z \rangle = \langle u(x), u(z) \rangle - \langle x, z \rangle = 0$. Donc $\operatorname{Ker} v \subset (\operatorname{Im} v)^\perp$.
   Par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} v = \dim \operatorname{Im} v - \dim E = \dim (\operatorname{Im} v)^\perp$ donc $\operatorname{Ker} v = (\operatorname{Im} v)^\perp$.
2. — Soit $x \in E$. Montrer que $(u_n(x))_n$ converge vers le projeté orthogonal de x sur $\operatorname{Ker} v$.
   — Soit $(a, b) \in \operatorname{Ker} v \times (\operatorname{Ker} v)^\perp$ tel que $x = a + b$. On a $u(a) = a$ donc $u_n(a) = a$. On a $b \in \operatorname{Im} v$ donc $b = v(c)$. On a $u_n(b) = u_n(u(c) - c) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^{k+1}(c) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(c) = \frac{1}{n} u_n(c) - \frac{1}{n} c$. Or (inégalité triangulaire et orthogonalité de u) $||u_n(c)|| \leqslant 1$ donc $u_n(b) \to 0$.

3 Planche 3

3.1 Question de cours

— Caractériser une matrice orthogonale avec ses lignes ou avec ses colonnes.

3.2 Application

— Les matrices

$$A := \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont-elles orthogonales ? Donner leurs déterminants.

— Par la question de cours, A est orthogonale et B ne l'est pas. Comme les colonnes de A ne forment pas une base orthonormée directe, $\det A = -1$. Comme B est triangulaire supérieure, $\det B = 1 \times 1 = 1$.

3.3 Exercices

Exercice 1

Supposons $n := \dim \geqslant 3$. Soient $a, b \in E$ unitaires tels que (a, b) est libre et $f : x \mapsto \langle a, x \rangle a + \langle b, x \rangle b$.

1. — Montrer que $\langle a, b \rangle \neq \pm 1$ et que $(a + b, a - b)$ est une base orthogonale de $\operatorname{Vect}\{a, b\}$.

— Supposons $\langle a, b\rangle = \pm 1$. Comme a, b sont unitaires, on a le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz donc (a, b) est liée. Par contraposée, $\langle a, b\rangle \neq \pm 1$.
On a $\langle a+b, a-b\rangle = ||a||^2 - ||b||^2 = 0$ donc $(a+b, a-b)$ est orthogonale et formée de vecteurs non nuls donc est libre. Donc c'est une base de $\mathrm{Vect}\{a, b\}$.

2. — Déterminer f^*.
   — On a $\langle f(x), y\rangle = \langle a, x\rangle \langle a, y\rangle + \langle b, x\rangle \langle b, y\rangle$. Cette expression est symétrique en x et y. Donc $f = f^*$.
3. — Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im} f$.
   — Par liberté de (a, b), $f(x) = 0 \Leftrightarrow \langle a, x\rangle = \langle b, x\rangle = 0$ donc $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(a, b)^\perp$.
   Par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Im} f = 2$. Or $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Vect}(a, b)$ donc $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(a, b)$.
4. — Déterminer les espaces propres de f.
   — On a $E_0(f) = \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(a, b)^\perp$.
   On a $f(a+b) = f(a) + f(b) = (1 + \langle a, b\rangle)(a+b)$ et $f(a-b) = (1 - \langle a, b\rangle)(a-b)$. Or $(a+b, a-b)$ est une base de $\mathrm{Vect}(a, b)$.
   Si $\langle a, b\rangle = 0$, les valeurs propres de f sont 0 et 1, ses espaces propres sont $E_0 = \mathrm{Vect}(a, b)^\perp$ et $E_1 = \mathrm{Vect}(a, b)$.
   Sinon, les valeurs propres de f sont $0, 1, -1$, ses espaces propres sont $E_0 = \mathrm{Vect}(a, b)^\perp$, $E_1 = \mathrm{Vect}(a+b)$, $E_{-1} = \mathrm{Vect}(a-b)$.

4 Exercices supplémentaires

Exercice 1

— Montrer qu'un endomorphisme orthogonal diagonalisable est une symétrie.
— Ses valeurs propres sont $-1, 1$ donc u est la matrice d'une symétrie dans une base de vecteurs propres.

Exercice 2

On considère sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ le produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$. Soient A, B orthogonales.
— Montrer que $M \mapsto AM$, $M \mapsto MB$ et $M \mapsto AMB$ sont orthogonales.
— On a $||AM||^2 = \mathrm{tr}\, M^T A^T A M = ||M||^2$. On a $||MB||^2 = \mathrm{tr}\, B^T M^T M B = ||M||^2$. Comme composée de deux isométries, $M \mapsto AMB$ est une isométrie.

Exercice 3

— Montrer que $\mathrm{SO}(2)$ est commutatif.
— On a un isomorphisme de groupes

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathrm{SO}(2) \\ e^{i\theta} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{array}.$$