Colle PSI*

Antoine Médoc

Semaines 9 et 10

1 Planche 1

1.1 Question de cours

— Démontrer la caractérisation séquentielle de l'adhérence.

1.2 Application

— Soit $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqslant x \leqslant y, x^2+y^2 < 1\right\}$. Dire si D est fermée et donner son adhérence.
— Soit $(x,y) \in \bar{D}$. Par passage à la limite, $x \leqslant y$ et $x^2+y^2 \leqslant$. Donc $\bar{D} \subset A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqslant x \leqslant y, x^2+y^2 \leqslant 1\right\}$.
Soit $(x,y) \in A$. La suite $\left(\frac{n}{n+1}x, \frac{n}{n+1}y\right)$ est dans D et converge vers (x,y) donc $(x,y) \in \bar{D}$.
Finalement, $\bar{D} = A$ et $(0,1) \in \bar{D}\backslash D$ donc D n'est pas fermée.

1.3 Exercices

Exercice 1

Soit $m \geqslant 2$. On considère $(E, ||\cdot||) := (\mathbb{R}^m, ||\cdot||)$, $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$, $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et les deux propositions suivantes :
(i) La suite $(u_n)_n$ admet une valeur d'adhérence.
(ii) Chacune des suites composantes admet une valeur d'adhérence.

— Quelles sont les implications entre ces deux propositions ?
— Comme une suite dans un espace vectoriel normé de dimension finie converge si et seulement si chacune de ses suites coordonnées dans une base converge, on a $(i) \Rightarrow (ii)$. Avec l'exemple $u_{2n} = (0,n)$ et $u_{2n+1} = (n,0)$, $(ii) \not\Rightarrow (i)$.

Exercice 2

Soient E un espace vectoriel normé, $a, b \in E$ et $r, R > 0$.
— Montrer que $||b-a|| \leqslant R-r \Leftrightarrow \bar{B}(a,r) \subset \bar{B}(b,R)$.
— Supposons que $||b-a|| \leqslant R-r$. Soit $x \in \bar{B}(a,r)$. On a $||b-x|| \leqslant ||b-a|| + ||a-x|| \leqslant R-r+r = R$, donc $x \in \bar{B}(b,R)$.
Supposons $\bar{B}(a,r) \subset \bar{B}(b,R)$. Soit $x := a - \frac{r}{||b-a||}(b-a)$. On a $x \in \bar{B}(a,r)$, donc $x \in \bar{B}(b,R)$. Or $||x-b|| =$ Donc $\left|\left|\left(-1-\frac{r}{||b-a||}\right)(b-a)\right|\right| = ||b-a|| + r$. Donc $||b-a|| \leqslant R-r$.

2 Planche 2

2.1 Question de cours

— Montrer que la convergence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses suites coordonnées dans une base.

2.2 Application

Soient $E := \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$,

$$N : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (u_n)_n & \longmapsto & \max_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \end{array} \right.$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e^{(n)} := (\delta_{k,n})_k \in E.$$

— Montrer que N est une norme sur E. Le théorème précédent s'applique-t-il à la suite $(e^{(n)})_n$ et à la base $(e^{(k)})_k$?

— Soit $u \in E$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n = 0$. Ainsi, $N(u) = ||(u_0, \dots, u_N)||_\infty$. Donc N est bien définie, définie-positive et homogène.
Soient $u, v \in E$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n = v_n = u_n + v_n = 0$. Ainsi, $N(u+v) = ||(u_0+v_0, \dots, u_N+v_N)||_\infty$, $N(u) = ||(u_0, \dots, u_N)||_\infty$ et $N(v) = ||(v_0, \dots, v_N)||_\infty$. Ainsi, N vérifie l'inégalité triangulaire.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\delta_{k,n})_n$ converge vers 0. Or, pour tout n, $N(e^{(n+1)} - e^{(n)}) = 1$. Donc $(e^{(n)})_n$ ne converge pas dans E.

2.3 Exercices

Exercice 1

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et

$$N : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \bar{\mathbb{R}}_+ \\ P & \longmapsto & \sup_{a\in A} |P(a)| \end{array} \right. .$$

1. — Donner des conditions nécesaires et suffisantes sur A pour que N définisse une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
   — Supposons que N définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$. On a $N(X) < +\infty$ donc A est bornée. Si A est finie, $\prod_{a\in A}(X-a)$ contredit la séparation de la norme N. Donc A est infinie et bornée.
   Supposons A infinie et bornée. Par continuité, N est bien définie. On sait qu'elle est homogène. Un polynôme non nul admet un nombre fini de racines donc N est séparée. On a $|P(a)+Q(a)| \leqslant |P(a)| + |Q(a)| \leqslant N(P) + N(Q)$ donc, par passage au sup, N vérifie l'inégalité triangulaire. Donc N est une norme.
2. — Soient A une partie infinie bornée et B une partie finie. Montrer que $N_A \leqslant N_{A\cup B}$.
   — On a $A \subset A \cup B$ et $A \cup B$ est bornée infinie.

3 Planche 3

3.1 Question de cours

— Montrer que toute application linéaire définie sur un espace normé de dimension finie est lipschitzienne.

3.2 Application

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que $D := \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = PAP^{-1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ on note

$$S_n(M) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k.$$

— Donner un exemple de norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer la limite de $(S_n(A))_n$ en fonction de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et de P.
— La norme $||\cdot||_\infty$ par rapport à la base canonique de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est une norme.
La fonction $\varphi : M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto PMP^{-1} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est linéaire donc lipschitzienne pour une constante $k \in \mathbb{R}_+$. Pour tout n, $\varphi(S_n(A)) = S_n(D)$. On a $S_n(D) = \mathrm{diag}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \lambda_i^k\right)_i \to \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_i}\right)_i =: S(D)$. Or $||S_n(A) - \varphi(S(D))|| = ||\varphi(S_n(D)) - \varphi(S(D))|| \leqslant k\, ||S_n(D) - S(D)|| \to 0$. Donc $S_n(A) \to \varphi(S(D)) = P\, \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_i}\right)_i P^{-1}$.

3.3 Exercices

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel normé et $(C_i)_i$ une famille de convexes.

1. — L'intersection $\bigcap_{i \in I} C_i$ est-elle nécessairement convexe ? La calculer si $(C_i)_i := (\bar{B}(0,n))_n$.
   — Oui. On a $\bigcap_{n \in n} \bar{B}(0,n) = \{0\}$
2. — L'union $\bigcup_{i \in I} C_i$ est-elle nécessairement convexe ? La calculer si $(C_i)_i := (B(0,n))_n$.
   — Non : $(C_i)_i := ([0,1],[2,3])$. On a $\bigcup_{n \in n} \bar{B}(0,n) = E$.
3. — Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et C un convexe. Montrer que $f(C)$ est convexe.
   — Soient $x, y \in C$. POur tout $t \in [0,1], tf(x) + (1-t)f(y) = f(tx + t(1-t)y) \in f(C)$.

Exercice 2

1. — Trouver une norme sur $\mathbb{K}[X]$ telle que $X^n \to 0$.
   — Soit $N = ||\cdot||_1$ sur $[0,1]$. On a $N(X^n) = \frac{1}{n+1}$.
2. — Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré d et $B := (1, X, \ldots, X^d, X^{d+1} - P, \ldots)$. Montrer que B est une base.
   — Elle est échelonnée en degré.
3. — Pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$ on note $(b_n(Q))_n$ les coordonnées de Q dans B. Montrer que

$$N : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ Q & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n(Q)}{n+1} \end{array} \right.$$

   définit une norme sur $\mathbb{K}[X]$ telle que $X^n \to P$.
   — Pour tout $n \geqslant d+1$, $N(X^n - P) = \frac{1}{n+1}$.

4 Exercices supplémentaires

Exercice 1

Soit $E := \mathcal{C}^0([0,1])$ et, pour toute $\varphi \in E$,

$$N_\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_0^1 \varphi\,|f| \end{array} \right. .$$

1. — Soit $\varphi \in E$ telle que $\varphi > 0$ sur $]0,1]$. Montrer que N_φ est bien définie et est une norme sur E. Donner un exemple de fonction φ telle que N_φ ne soit pas une norme.
   — Par positivité de l'intégrale, N_φ est positive. Si $N_\varphi(f) = 0$, $\varphi\,|f|$ étant continue, $\varphi\,|f|$ est nulle et, comme $\varphi > 0$ sur $]0,1]$, $f = 0$ sur $]0,1]$: par continuité de f en 0, $f = 0$. Donc N_φ est définie-positive.
   Par bilinéarité du produit et linéarité de l'intégrale, N_φ est homogène.
   Par l'inégalité triangulaire du module et par croissance de l'intégrale, N_φ vérifie l'inégalité triangulaire.
   Si $\varphi = 0$, N_φ n'est pas définie-positive donc n'est pas une norme.

2. — Soient $\varphi, \psi \in E$ à valeurs strictement positives. Montrer que N_φ et N_ψ sont équivalentes.
   — Les fonctions φ, ψ sont continues sur un intervalle donc atteignent leurs bornes. On note $M > 0$ le maximum de φ et $m > 0$ le minimum de ψ. Pour toute $f \in E$, $\varphi\,|f| \leqslant Mf \leqslant M\frac{1}{m}\psi f$ d'où $N_\varphi(f) \leqslant \frac{M}{m}N_\psi(f)$. De même, avec M' le maximum de ψ et m' le minimum de φ, $N_\psi(f) \leqslant \frac{M'}{m'}N_\varphi(f)$.

3. — Soient $\varphi : t \in [0,1] \mapsto t \in \mathbb{R}$ et $\psi : t \in [0,1] \mapsto t^2 \in \mathbb{R}$. Montrer que N_φ et N_ψ ne sont pas équivalentes en étudiant la suite $(f_n)_n := \left(t \in [0,1] \mapsto e^{-nt} \in \mathbb{R}\right)_n$.
   — Les fonctions φ et ψ sont bien des éléments de E strictement positifs sur $]0,1]$. Pour tout n, f_n est bien un élément de E.
   On a $N_\varphi(f_n) = \int_0^1 te^{-nt}dt = \left[-\frac{e^{-nt}}{n}t\right]_0^1 + \frac{1}{n}\int_0^1 e^{-nt}dt = -\frac{e^{-n}}{n} + \frac{1}{n^2}(1 - e^n) \sim \frac{1}{n^2}$.
   On a $N_\psi(f) = \int_0^1 t^2e^{-nt}dt = \left[-\frac{e^{-nt}}{n}t^2\right]_0^1 + \frac{2}{n}\int_0^1 te^{-nt}dt = o(1/n^3) + \frac{2}{n}N_\varphi(f) \sim \frac{2}{n^3}$.
   Finalement, $\frac{N_\varphi(f_n)}{N_\psi(f_n)} \sim \frac{n}{2} \to +\infty$ donc N_φ et N_ψ ne sont pas équivalentes.

4. — L'espace vectoriel E est-il de dimension finie ?
   — Par contraposée, E n'est pas de dimension finie.

Exercice 2

— Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ telle que, pour toute $g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$, $\int_a^b fg = 0$. Que peut-on dire de f ?

— On a $\int_a^b f\bar{f} = 0$ donc $|f|^2 = 0$, i.e. $f = 0$.

Exercice 3

Soit $E := \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{K})$ et

$$N : \left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & |f(0)| + \int_0^1 |f'| \end{array}\right. .$$

1. — Montrer que N est une norme.
   — Pour toute $f \in E$, f' est continue donc intégrable sur $[0,1]$ donc N est bien définie. Par positivité de l'intégrale, N est positive. Si $N(f) = 0$, $f(0) = 0$ et $\int_0^1 |f| = 0$ donc, f' étant continue, $f(0) = 0$ et $f' = 0$ donc $f = 0$. Donc N est définie-positive.
   Par linéarité de la dérivée et de l'intégrale, N est homogène.
   Par linéarité de la dérivation, par inégalité triangulaire du module et par croissance de l'intégrale, N vérifie l'inégalité triangulaire.

2. — Montrer que $||\cdot||_\infty \leqslant N$.
   — Soit $f \in E$. Pour tout $x \in [0,1]$, $|f(x)| \leqslant |f(0)| + \int_0^x |f'| \leqslant |f(0)| + \int_0^1 |f'| = N(f)$. Ainsi, $||f||_\infty \leqslant N(f)$.