

Colle PSI*

Antoine Médoc

Semaine 11 (12 décembre 2022)

1 Planche 1

1.1 Question de cours

- Montrer que toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre. Montrer que toute famille de sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est en somme directe.

1.2 Application

- Montrer que $\mathbb{R}_n[X] = \bigoplus_{k=0}^n \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid XP' = kP\}$.
- Soit

$$u : \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ \mathbb{R}_n[X] & \longmapsto & XP' \end{array} .$$

Elle est bien définie et linéaire. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $u(X^k) = kX^k$ donc k est valeur propre de u et $\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid XP' = kP\}$ est le sous-espace propre associé. Ainsi, u admet $n + 1$ valeurs propres distinctes donc il est diagonalisable et $\mathbb{R}_n[X]$ est la somme directe de ses sous-espaces propres.

1.3 Exercices

Exercice 1

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on note

$$M(a, b) := \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} .$$

- Soit $A := M(0, 1)$. Montrer que A est diagonalisable et donner P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.
 - On a $\chi_A = (X-2)(X+1)^2$. On a $\text{Ker}(A+I_3) = \{x + y + z = 0\} = \text{Vect} \{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$ et $\text{Ker}(A - 2I_3) = \text{Vect} \{(1, 1, 1)\}$. Donc A est diagonalisable et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

convient : $P^{-1}AP = \text{diag}(-1, -1, 2)$.

- Calculer $P^{-1}M(a, b)P$ en fonction de a et b .

- On a $M(a, b) = aI_3 + bA$ donc $P^{-1}AP = aI_3 + b \operatorname{diag}(-1, -1, 2) = \operatorname{diag}(a - b, a - b, a + 2b)$.
- 3. — En déduire le déterminant et le spectre de $M(a, b)$.
 - Deux matrices semblables ont même déterminant et spectre donc $\det M(a, b) = (a + 2b)(a - b)^2$ et le spectre de $M(a, b)$ est $\{a + 2b, a - b\}$.

Exercice 2

Soit $D \in M_n(\mathbb{C})$ telle que χ_D est scindé à racines simples.

- L'équation $X^3 - 3X = D$ d'inconnue $X \in M_n(\mathbb{C})$ admet-elle un nombre fini de solutions ?
- Comme χ_D est scindé à racines simples, D est diagonalisable et chacun de ses espaces propres est une droite. Soit (e_1, \dots, e_n) une base de vecteurs propres de D . On a

$$P^{-1}DP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Soit X une solution de l'équation. On a $XD = X^4 - 3X^2 = XD$ donc X commute avec D donc X stabilise tous les espaces propres de D . Ainsi, (e_1, \dots, e_n) est une base de vecteurs propres de X donc on peut écrire

$$P^{-1}XP = \operatorname{diag}(x_1, \dots, x_n).$$

On a $P^{-1}(X^3 - 3X)P = \operatorname{diag}(x_1^3 - 3x_1, \dots, x_n^3 - 3x_n)$ donc, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i^3 - x_i = \lambda_i$. Finalement,

$$\left\{ X \in M_n(\mathbb{C}) \mid X^3 - 3X = D \right\} \subset \left\{ P \operatorname{diag}(x_1, \dots, x_n) P^{-1} ; \forall i, x_i^3 - 3x_i = \lambda_i \right\}.$$

Or, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X^3 - 3X - \lambda_i$ admet un nombre fini de racines donc ce deuxième ensemble est fini. Donc l'équation $X^3 - X = D$ admet un nombre fini de solutions dans $M_n(\mathbb{K})$.

2 Planche 2

2.1 Question de cours

- Donner la définition du polynôme caractéristique d'une matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$. Quel est son degré d ? Donner ses coefficients de degré d , $d - 1$ et 0 .

2.2 Application

- Deux matrices d'ordre 2 ayant la même trace et le même déterminant sont-elles nécessairement semblables? Deux matrices carrées d'ordre 2 ayant la même trace t et le même déterminant d vérifiant $t^2 - 4d \neq 0$ sont-elles semblables?
- Les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ont la même trace 2 et le même déterminant 1 mais ne sont pas semblables. Le polynôme caractéristique de deux telles matrices est $\chi = X^2 - tX + d$ et est de déterminant $\Delta = t^2 - d$. Si $\Delta \neq 0$, il est scindé à racines simples sur \mathbb{C} donc les matrices sont diagonalisables et ont même valeurs propres, donc elles sont semblables.

2.3 Exercices

Exercice 1

Soit

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que A est diagonalisable. Donner ses valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres associés.
— On a $\chi_A = X(X-2)(X-4)$. Il est scindé à racines simples donc ses valeurs propres sont $0, 2, 4$ et tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1.
- Soit M commutant avec A . Montrer que M est diagonalisable dans une même base que A .
— Comme M commute avec A , les sous-espaces propres de A sont stables par M . Or, ce sont des droites. Ainsi, toute base de vecteurs propres de A est aussi une base de vecteurs propres de M .
- En déduire le nombre de matrices B telles que $A = B^2$.
— Soit e_1, e_2, e_3 une base de vecteurs propres (associés respectivement à $0, 2, 4$) de A et $P = \text{Mat}(e_1, e_2, e_3)$.
Soit B telle que $B^2 = A$. On a $BA = B^3 = AB$ donc B commute avec A . Il existe $\Delta := \text{diag}(a, b, c)$ telle que $\Delta = P^{-1}BP$. Or $P^{-1}AP = \text{diag}(0, 2, 4)$ donc $\text{diag}(a^2, b^2, c^2) = \text{diag}(0, 2, 4)$, i.e $a = 0, b = \pm\sqrt{2}, c = \pm 2$.
Réciproquement, si $B := P^{-1} \text{diag}(0, \pm\sqrt{2}, \pm 2)$, $B^2 = A$. Donc il existe 4 telles matrices B .

Exercice 2

- La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} := (t \mapsto \cos(nt))_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
- L'application

$$D : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f'' \end{cases}$$

est un endomorphisme et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D(e_n) = -n^2 e_n$ donc e_n est un vecteur propre associé à la valeur propre $-n^2$. Ainsi, toute sous-famille finie de $(e_n)_n$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes donc est libre. Donc $(e_n)_n$ est libre.

3 Planche 3

3.1 Question de cours

- Quelle est la condition classique nécessaire et suffisante sur le polynôme caractéristique d'une matrice pour qu'elle soit diagonalisable ? Le prouver.

3.2 Application

- La matrice

$$A := \begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

est-elle trigonalisable/diagonalisable ?

- On a, en calculant par blocs, $\chi_A = (X-1)((X+3)(X-4)+12) = X(X-1)^2$. Il est scindé donc A est trigonalisable. La matrice $A - I_3$ est de rang 2, donc $\dim \text{Ker}(A - I_3) = 1 < 2$. Donc A n'est pas diagonalisable.

3.3 Exercices

Exercice 1

Soit

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (X-1)(X-2)P' - 2XP \end{cases} .$$

- Montrer que φ est un endomorphisme et déterminer le degré de ses vecteurs propres.
 - Comme $\mathbb{R}[X]$ est un anneau, φ est bien définie. Par bilinéarité du produit et linéarité de la dérivation, φ est linéaire. Soit $P \neq 0$, d son degré et $a \neq 0$ sont coefficient dominant. On a $\deg(\varphi(P)) \leq d + 1$ et le coefficient de $\varphi(P)$ de degré $d + 1$ est $a(d - 2)$. Par contraposée, un vecteur propre de φ est de degré d tel que $d - 2 = 0$, i.e. $d = 2$.
- Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par φ et que $(1, X - 1, (X - 1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
 - Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Le coefficient de degré $2 + 1$ de $\varphi(P)$ est 0 donc $\deg \varphi(P) \leq 2$. La famille $(1, X - 1, (X - 1)^2)$ est échelonnée en degré, donc est libre. Elle est de cardinal $\dim \mathbb{R}_2[X]$ donc en est une base.
- Écrire la matrice M représentative de l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ induit par φ dans la base $(1, X - 1, (X - 1)^2)$.
 - On a

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} .$$

- Déterminer les éléments propres de φ .
 - Par la question (1), les sous-espaces propres de φ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$, donc les valeurs propres de φ sont celles de la matrice M , donc $\text{Sp } \varphi = \{2, -3, -4\}$.
Comme M a trois valeurs propres distinctes, ses sous-espaces propres sont des droites. On a vu que $E_{-4}(\varphi) = \text{Vect} \{(X - 1)^2\}$. On a $E_{-3}(M) = \text{Vect} (0, -1, 1)$ donc $-(X - 1) + (X - 1)^2 = (X - 1)(X - 2)$ dirige $E_{-3}(\varphi)$. De même, $E_2(M) = \text{Vect} \{(1, -2, 1)\}$ donc $1 - 2(X - 1) + (X - 1)^2 = (X - 2)^2$ dirige $E_2(\varphi)$.

Exercice 2

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ telles que B est inversible.

- Les matrices AB et BA ont-elles nécessairement les mêmes valeurs propres ?
- On a $\chi_{AB}(0) = \det(-AB) = (-1)^n(\det A)(\det B) = \det(-BA) = \chi_{BA}(0)$ et, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\chi_{AB}(\lambda) = \det(\lambda I_n - AB) = \det(B^{-1}\lambda I_n B - B^{-1}BAB) = \det(\lambda I_n - BA)$. Donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. En particulier, AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

4 Exercices supplémentaires

Exercice 1

Soit u un automorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E .

- Donner le spectre de u^{-1} en fonction de celui de u .

- Comme u et u^{-1} sont des injectifs, ils ont un noyau nul, i.e. n'admettent pas 0 comme valeur propre. Pour tout $\mu \in \mathbb{K}^*$,

$$\begin{aligned} \mu \in \text{Sp}(u^{-1}) &\Leftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0\}, u^{-1}(x) = \mu x \\ &\Leftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0\}, u(x) = \mu^{-1}x && \Leftrightarrow \mu \in \text{Sp}(u) \end{aligned}$$

donc $\text{Sp}(u^{-1}) = \{\mu^{-1} ; \mu \in \text{Sp}(u)\}$.

Exercice 2

Soit $J \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

- Montrer que J est diagonalisable, donner ses valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres associés.
- On a $\text{rg } J = 1$ donc 0 est valeur propre de J et $\dim E_0 = n-1$. On a, avec $e_1 := (1, \dots, 1)$, $Je_1 = ne_1$ donc 1 est valeur propre et $\dim E_n \geq 1$. Donc $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(J)} \dim E_\lambda \geq n-1+1 = n$ donc J est diagonalisable et $\dim E_n = 1$.