Colle PSI*

Antoine Médoc

Semaine 8 (19 novembre 2022)

1 Planche 1

1.1 Question de cours

- Énoncer le théorème de convergence dominée et le théorème d'intégration terme à terme.
- Soit I un intervalle réel.
  Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues par morceau sur I qui CVS vers f continue par morceau et telle qu'il existe $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ vérifiant $\forall n, |f_n|\, \varphi$. Les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et
  $$\int_I f_n \longrightarrow \int_I f.$$
  Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions $\mathrm{L}^1(\mathrm{I})$ qui CVS vers une fonction continue par morceaux telle que $\sum_n \int_I |f_n|$ CV. La somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et
  $$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n.$$

1.2 Application

- Étudier la convergence de la suite $\left(\int_0^{\pi/2} \sin^n\right)$.
- La suite de fonctions continues $(\sin^n)_n$ CVS vers la fonction continue par morceaux $\mathbf{1}_{\{1\}}$ et est dominée par la fonction intégrable $\varphi : x \mapsto 1$. Par le théorème de convergence dominée,
  $$\int_0^{\pi/2} \sin^n \longrightarrow 0.$$

1.3 Exercices

Exercice 1

1. — Quelle est la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2}$?
   — On a $\frac{1}{(1+t^2)^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^4}$ donc cette intégrale converge.
2. — Donner sa valeur J. On pourra utiliser le changement de variable $t = \tan\theta$.
   — La fonction tan est une bijection croissante $\mathcal{C}^1$ de $[0, \pi/2[$ sur $[0, +\infty[$. On a $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ donc $\frac{1}{(1+t^2)^2} = \cos^4\theta$. On a $dt = \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta$. Ainsi $J = \int_0^{\pi/2} \cos^2 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2\theta)+1}{2} d\theta = \left[\frac{\sin(2\theta)}{4} + \frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \pi/4$.
3. — Étudier l'existence et la valeur de $I := \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$.
   — Pour tout $x \geqslant 1$, $\frac{x^2}{(1+x^2)^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$ donc I existe. Par IPP, $\int_0^{+\infty} x \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \left[x \times \frac{-1}{2} \frac{1}{1+x^2}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-1}{2} \frac{1}{1+x^2} = 0 - 0 + \frac{1}{2} [\arctan]_0^{+\infty} = \pi/4$.

4. — Calculer J. On pourra commencer par calculer $I+J$.
   — On a $I+J=\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}dx=\pi/2$. Donc $J=\pi/2-\pi/4=\pi/4$.

2 Planche 2

2.1 Question de cours

— Soient $f,g\in\mathcal{C}_{\mathrm{pm}}([a,+\infty[,\mathbb{K})$ telles que $f(t)=\mathcal{O}_{+\infty}(g(t))$ et g est intégrable en $+\infty$. Montrer que f est intégrable en $+\infty$.

2.2 Application

— Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^1\lfloor 1/t\rfloor$?
— On a $\lfloor 1/t\rfloor\leqslant 1/t<\lfloor 1/t\rfloor+1$ donc $1\leqslant\frac{1/t}{\lfloor 1/t\rfloor}<1+\frac{1}{\lfloor 1/t\rfloor}$ donc $\lfloor 1/t\rfloor\sim_{0^+}1/t$. Or $\int_0^1$ ne converge pas donc $\int_0^1\lfloor 1/t\rfloor$ n'est pas convergente.

2.3 Exercices

Exercice 1

Soit

$$f:\left|\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}\end{array}\right..$$

1. — La fonction f est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$?
   — On a $f(x)=o_{+\infty}(1/x^{3/2})$ donc f est intégrable en $+\infty$.
2. — Soit $b>1$. Calculer $\int_1^b f$.
   — Par IPP, $\int_1^b f=\left[(\ln x)\frac{-1}{1+x}\right]_1^b-\int_1^b\frac{1}{x}\frac{-1}{1+x}dx=-\frac{\ln b}{1+b}+\int_1^b\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}dx=-\frac{\ln b}{1+b}+[\ln x-\ln(x+1)]_1^b=-\frac{\ln b}{1+b}+\ln b-\ln(b+1)+\ln 2$.
3. — Donner la valeur de $\int_1^{+\infty}f$.
   — On a $\int_1^b f\to_{+\infty}\ln 2$ donc $\int_1^{+\infty}f=\ln 2$.

3 Planche 3

3.1 Question de cours

— Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, étudier la nature de $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}dt$.

3.2 Application

— Quelle est la nature de $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt$?
— On a $\frac{1}{1+t^2}\sim_{+\infty}\frac{1}{t^2}$ donc cette intégrale est convergente.

3.3 Exercices

Exercice 1

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on note

$$f_n:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & x^ne^{-x^2}\end{array}\right..$$

1. — Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   — On a $f_n(x) = o(1/x^2)$ donc $f_n \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}_+)$.
2. — Calculer $I_0 := \int_0^{+\infty} f_1$.
   — On a $\int_0^{+\infty} f_1 = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$.
3. — Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $I_{2n+1} := \int_0^{+\infty} f_{2n+1}$.
   — Par IPP, $I_{2n+1} = \int_0^{+\infty} x^{2n}xe^{-x^2}dx = \left[x^{2n}\frac{-1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2nx^{2n-1}\frac{-1}{2}e^{-x^2}dx = 0 + nI_{2n-1}$. Par récurrence sur n, $I_{2n+1} = n!I_0 = \frac{n!}{2}$.

4 Exercices supplémentaires

Exercice 1

Soit

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{t-1}{t\ln t} \end{array} \right. .$$

1. — Montrer que $\varphi \in \mathrm{L}^1([1/2,1])$.
   — On a $\varphi(t) \sim_1 \frac{t-1}{t(t-1)} = 1$ donc φ est intégrable en 1.
2. — Montrer que $\int_x^{x^2} \varphi \to_{x\to 1^-} 0$.
   — $\int_x^{x^2} \varphi = -\int_{1/2}^{x} \varphi + \int_{1/2}^{x^2} \varphi \to_{x\to 1^-} -\int_{1/2}^{1} \varphi + \int_{1/2}^{1} \varphi = 0$.
3. — Étudier $\lim_{x\to 1^-} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln}$.
   — On a $\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln} = \int_x^{x^2} \frac{t-1}{t\ln t}dt + \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}dt$ avec $\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}dt = [\ln(-\ln)]_x^{x^2} = \ln 2$. Ainsi, $\lim_{x\to 1^-} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln} = 0 + \ln 2 = \ln 2$.

Exercice 2

1. — Soit $x > 1$. Calculer $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}dt$.
   — On a $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}dt = \left[\frac{1}{1-x}t^{1-x}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1}$.
2. — Donner un équivalent de $\zeta : x \in]1,+\infty[\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \in \mathbb{R}$ en 1^+.
   — Par le critère de Riemann, ζ est bien définie.
   On a pour tout n $\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^x}dt \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x}dt$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}dt \leqslant \zeta(x)$ et $\zeta(x) - \frac{1}{1^x} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}dt$, i.e. $\frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}$.
   Finalement, $\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$

Exercice 3

Pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ on note

$$f : \left| \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{|\ln x|^\beta}{(1-x)^\alpha} \end{array} \right. .$$

1. — Trouver un équivalent de f en 0 et en 1.
   — On a $f(x) \sim_0 |\ln x|^\beta$ et $f(x) \sim_1 \frac{(1-x)^\beta}{(1-x)^\alpha} = (1-x)^{\beta-\alpha}$.
2. — Déterminer les valeurs $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ telles que f se prolonge par continuité sur $[0,1]$.
   — La fonction f se prolonge par continuité en 0 si et seulement si $\beta \leqslant 0$.
   La fonction f se prolonge par continuité en 1 si et seulement si $\beta \geqslant \alpha$.
   La fonction f se prolonge par continuité sur $[0,1]$ si et seulement si $\alpha \leqslant \beta \leqslant 0$.

3. — Déterminer les valeurs $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ telles que f est intégrable sur $]0,1[$.
   — La fonction $x \mapsto (1-x)^{\beta-\alpha}$ est intégrable en 1 si et seulement si $\alpha - \beta < 1$.
   Pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, $|\ln x|^{\beta} = o_{0^+}(1/\sqrt{x})$ donc est intégrable en 0.
   Finalement, f est intégrable si et seulement si $\alpha < 1 + \beta$.

Exercice 4

- Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$ telle que, pour toute $g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$, $\int_a^b fg = 0$. Que peut-on dire de f ?
- On a $\int_a^b f\bar{f} = 0$ donc $|f|^2 = 0$, i.e. $f = 0$.