Théorème de Kronecker

Riffaut Antonin

2013-2014

Théorème 1 (Kronecker)**.** *Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire, de degré $n \geq 1$. On suppose que les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont de module inférieur ou égal à 1, et que 0 n'est pas racine. Alors les racines de P sont des racines de l'unité.*

Démonstration. Notons Ω_n l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{Z}[X]$, de degré n, et dont toutes les racines dans $\mathbb{C}$ sont de module inférieur ou égal à 1, et distinctes de 0. Bien entendu, $P \in \Omega_n$. Démontrons que Ω_n est un ensemble fini : soit $F \in \Omega_n$,

$$F = X^n + \sum_{i=1}^{n} f_i X^{n-i},$$

et notons $\beta_1, \ldots, \beta_n$ les racines de F dans $\mathbb{C}$ (non nécessairement distinctes). Par les relations coefficients-racines, pour tout $p \in \{1, \ldots, n\}$,

$$|f_p| = \left| \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \prod_{j=1}^{p} \beta_{i_j} \right| \leq \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \underbrace{\prod_{j=1}^{p} |\beta_{i_j}|}_{\leq 1} \leq \binom{n}{p}.$$

Comme les coefficients de F sont entiers, alors chacun d'entre eux ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs (indépendamment de F), ce qui impose à l'ensemble Ω_n d'être fini, le degré des éléments de Ω_n étant fixé égal à n.

À présent, notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines de P dans $\mathbb{C}$, et définissons, pour tout $k \geq 1$, $P_k = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i^k) \in \mathbb{C}[X]$, ainsi que $Q_k = X^k - Y \in \mathbb{Z}[X, Y]$. Commençons par montrer que $P_k \in \mathbb{Z}[X]$, puis que $P_k \in \Omega_n$. Pour ce faire, posons $R_k(Y) = \mathrm{Res}_X(P(X), Q_k(X, Y))$; R_k est un polynôme de $\mathbb{Z}[Y]$, puisque $P(X)$ et $Q_k(X, Y)$ sont tous les deux des polynômes de $\mathbb{Z}[X, Y]$. De plus,

$$R_k(Y) = \prod_{i=1}^{n} Q_k(\alpha_i, Y) = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i^k - Y) = (-1)^n P_k(Y),$$

ce qui prouve que $P_k \in \mathbb{Z}[X]$. On vérifie immédiatement que P_k est unitaire, et que ses racines sont toutes de module inférieur ou égal à 1, et distinctes de 0, autrement dit que $P_k \in \Omega_n$.

Remarquons que, puisque Ω_n est un ensemble fini, l'ensemble Z_n de toutes les racines des polynômes de Ω_n est également un ensemble fini. Soit α une racine de $P = P_1$. Pour tout $k \geq 1$, α^k est une racine de P_k, de sorte que l'application $k \longmapsto \alpha^k$ définit bien une application de $\mathbb{N}^*$ dans Z_n. Cette application est nécessairement non injective, d'où l'existence de deux entiers $1 \leq r < s$ tels que $\alpha^r = \alpha^s$. Finalement, $\alpha^{s-r} = 1$, et donc α est bien une racine de l'unité. ■

Corollaire 2. *Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire. On suppose que P est irréductible et que les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont de module inférieur ou égal à 1. Alors $P = X$ ou P est un polynôme cyclotomique.*

Démonstration. Supposons que $P \neq X$. Comme P est irréductible, alors 0 n'est pas racine de P, donc d'après le théorème de Kronecker, les racines de P sont des racines de l'unité. On en déduit qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour toute racine α de P, $\alpha^N = 1$, de sorte que $P|X^N - 1$. Or la factorisation en irréductibles de $X^N - 1$ dans $\mathbb{Z}[X]$ étant

$$X^N - 1 = \prod_{d|N} \Phi_d,$$

par irréductibilité des polynômes cyclotomiques Φ_d, on en conclut que P est l'un des Φ_d pour $d|N$. ■

Remarque. Dans la démonstration du théorème de Kronecker, voici une autre manière de démontrer que $P_k \in \mathbb{Z}[X]$: pour $l \in \{1, \ldots, n\}$, le coefficient en X^{n-l} de P_k est égal à $(-1)^l \sigma_l(\alpha_1^k, \ldots, \alpha_n^k)$. Or $\sigma_l(X_1^k, \ldots, X_n^k) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ est un polynôme symétrique, donc il existe $S_l \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ tel que

$$\sigma_l(X_1^k, \ldots, X_n^k) = S_l(\sigma_1(X_1, \ldots, X_n), \ldots, \sigma_n(X_1, \ldots, X_n)).$$

Comme $\sigma_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}$, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on en déduit que $\sigma_l(\alpha_1^k, \ldots, \alpha_n^k) \in \mathbb{Z}$.

Références

[Szp] Aviva Szpirglas, *Mathématiques L3.*