

Sous-algèbres réduites de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

RIFFAUT Antonin

2013-2014

Définition 1. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre associative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que $\mathcal{A}$ est *réduite* si elle ne possède pas d'élément nilpotent non trivial.

Proposition 2. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre associative réduite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont codiagonalisables.

Pour ce faire, nous allons établir que tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont diagonalisables, et que $\mathcal{A}$ est commutative. Nous pourrions alors conclure que les éléments de $\mathcal{A}$ sont codiagonalisables.

Démonstration.

- Dans un premier temps, nous allons vérifier que si $\mathcal{A}$ est réduite, alors la sous-algèbre $\mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$ est également réduite. Nous pourrions alors supposer sans perte de généralité que $I_n \in \mathcal{A}$.
Soit $M = A + \lambda I_n \in \mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$ avec $A \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On suppose que M est nilpotente. Alors A est inversible : en effet, si μ est une valeur propre de A , alors $\mu + \lambda$ est une valeur propre de M . Comme M est nilpotente, son unique valeur propre est 0, d'où $\mu = -\lambda$. On en déduit que $\text{Sp}(A) = \{-\lambda\}$ avec $-\lambda \neq 0$: A est donc inversible. En outre, comme A et M commutent, alors AM est également nilpotente. Or $AM = A^2 + \lambda A \in \mathcal{A}$; puisque $\mathcal{A}$ est réduite, nécessairement $AM = 0$, et par conséquent $A^{-1}AM = M = 0$, ce qui achève de démontrer que $\mathcal{A} + \mathbb{C}I_n$ est réduite.
- À partir de maintenant, on suppose que $I_n \in \mathcal{A}$, de sorte que les polynômes en les éléments de $\mathcal{A}$ soient encore des éléments de $\mathcal{A}$. Soit $A \in \mathcal{A}$. Nous allons démontrer que A est diagonalisable. Soit $\chi_A = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i} \in \mathbb{C}[X]$ son polynôme caractéristique, et $P = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i) \in \mathbb{C}[X]$. En notant $m = \max_{i \in \{1, \dots, r\}} m_i$, on a $\chi_A | P^m$, donc par le théorème de Cayley-Hamilton, $P(A)^m = 0$. Or $P(A) \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ est réduite, donc $P(A) = 0$. P étant scindé à racines simples, on en déduit que A est diagonalisable.
- Il reste à démontrer que $\mathcal{A}$ est commutative. Pour ce faire, nous allons tout d'abord montrer que l'algèbre $\mathcal{A}$ est engendrée par les projecteurs de $\mathcal{A}$. Soit en effet $A \in \mathcal{A}$. Notons de nouveau $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres distinctes. Comme A est diagonalisable, alors

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(A).$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on note p_i le projecteur sur $E_{\lambda_i}(A)$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_{\lambda_j}(A)$. Alors pour tout $x \in \mathbb{C}^n$:

$$Ax = A \left(\sum_{i=1}^r p_i(x) \right) = \sum_{i=1}^r A \underbrace{p_i(x)}_{\in E_{\lambda_i}(A)} = \sum_{i=1}^r \lambda_i p_i(x)$$

d'où $A = \sum_{i=1}^r \lambda_i p_i$. Les p_i sont des éléments de $\mathcal{A}$ en tant que polynômes en A : par exemple, $p_i = L_i(A)$ où L_i est le polynôme d'interpolation tel que $L_i(\lambda_j) = 0$ pour $i \neq j$, et $L_i(\lambda_i) = 1$. Finalement, toute matrice $A \in \mathcal{A}$ est combinaison linéaire finie de projecteurs de $\mathcal{A}$.

Pour conclure, observons que si $A \in \mathcal{A}$ et si B est un projecteur de $\mathcal{A}$, alors

$$\begin{aligned}(BAB - BA)^2 &= BABBAB - BABBA - BABAB + BABA \\ &= BABAB - BABA - BABAB + BABA \\ &= 0.\end{aligned}$$

$BAB - BA$ est nilpotente et appartient à $\mathcal{A}$, donc $BA = BAB$. De même, $(BAB - AB)^2 = 0$ d'où $BAB = AB$. On en déduit que $AB = BA$. Dans le cas général, étant données $A, B \in \mathcal{A}$ quelconques, il suffit d'écrire B comme combinaison linéaire finie de projecteurs de $\mathcal{A}$, et on aboutit aisément à la même conclusion. L'algèbre $\mathcal{A}$ est bien commutative. ■

Complément : diagonalisation simultanée

Proposition 3. Soient K un corps (commutatif), E un K -espace vectoriel de dimension finie n , I un ensemble, et $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E qui commutent deux à deux. Alors les f_i sont codiagonalisables.

Démonstration. Nous allons raisonner par récurrence sur n . Pour $n = 1$, le résultat est immédiat. Supposons que $n \geq 2$. On distingue deux cas :

Cas 1 : les f_i sont tous des homothéties. Le résultat est alors direct.

Cas 2 : il existe $i_0 \in I$ tel que f_{i_0} ne soit pas une homothétie. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres distinctes. Comme f_{i_0} est diagonalisable, alors

$$E = \bigoplus_{k=1}^r E_{\lambda_k}(f_{i_0}).$$

Fixons $k \in \{1, \dots, r\}$. $E_{\lambda_k}(f_{i_0})$ est stable par f_{i_0} et par tous les f_i , $i \neq i_0$, car ils commutent tous avec f_{i_0} . Pour $i \in I$, notons alors $g_{k,i}$ l'endomorphisme induit par f_i sur $E_{\lambda_k}(f_{i_0})$. Les endomorphismes $g_{k,i}$ sont diagonalisables et commutent deux à deux ; de plus, $\dim E_{\lambda_k}(f_{i_0}) < n$ (car f_{i_0} n'est pas une homothétie). Par hypothèse de récurrence, il existe alors une base $\mathcal{B}_k$ de $E_{\lambda_k}(f_{i_0})$ dans laquelle les matrices des $g_{k,i}$ sont toutes diagonales. La base $\mathcal{B}$ de E obtenue en concaténant les bases $\mathcal{B}_k$ des $E_{\lambda_k}(f_{i_0})$ est alors une base de diagonalisation simultanée des endomorphismes f_i , ce qui conclut la preuve. ■

Références

[MNE] MNEIMNÉ, *Réduction des endomorphismes*.