Programme de colle n°4 : Complexes et sommes

$10/10 \to 14/10$

Le corps $\mathbb{C}$ des complexes

- Définition de $\mathbb{C}$, de i.
- Structure algébrique de $\mathbb{C}$.
- Plan complexe et représentation géométrique des complexes.
- Argument, module, conjugué, leurs représentations géométriques, leurs propriétés. Inégalité triangulaire.
- Notamment $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$ et $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$.
- Forme trigonométrique, forme exponentielle, définition de $\mathbb{U}$, formules d'Euler, de Moivre.
- Factorisation par l'angle moitié.
- Définition de l'exponentielle complexe. Propriétés basiques.

Sommes, produits, binôme de Newton

- Notation $\sum$, factorisation dans une somme. Scission d'une somme d'additions en deux sommes.
- Sommes classiques : $\sum_{k=0}^{n} k$, $\sum_{k=0}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} a^k$.
- Sommes télescopiques. Découpage de somme sur une partition de l'ensemble des indices.
- Décalages d'indices.
- Notation $\prod$ et propriétés du produit.
- Conventions sur les sommes vides et les produits vides.
- Regroupement de facteurs dans un produit, découpage sur une partition des indices, produit télescopique.
- Définition de la factorielle et des coefficients binomiaux.
- Symétrie des coefficients binomiaux, formule de Pascal, triangle de Pascal.
- Binôme de Newton. Factorisation de $x^n - y^n$.
- Transformation de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en polynôme de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
- Linéarisation de polynômes trigonométriques.
- Sommes de fonctions circulaires $\sum_{k=0}^{n} \cos(nx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(nx)$ par exponentielle et somme géométrique.
- **Sommes doubles** : Sommes sur un rectangle $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant a_{i,j}}$ ou un triangle $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant a_{i,j}}$ et $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant a_{i,j}}$ de $\mathbb{N}$. Découpage selon les lignes ou les colonnes de ces sommes.

Questions de cours

- Énoncé de l'inégalité triangulaire + démonstration (sans cas d'égalité).
- Factorisation par l'angle moitié : Déterminer module et argument de $\mathrm{e}^{i\alpha} + \mathrm{e}^{i\beta}$ pour α et β réels.
- Calcul de $\sum_{k=0}^{n} k^2$ et $\sum_{k=0}^{n} a^k$.
- Citer le théorème du binôme de Newton, le théorème de factorisation de $x^n - y^n$ et démontrer ce dernier théorème.
- Formule de Pascal + démonstration du cas $1 \leqslant p \leqslant n$.
- Calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- Linéariser $\cos^3(\theta)\sin^2(2\theta)$.