

Programme de colle n°5 : Sommes

17/10 $\rightarrow$ 21/10

Sommes, produits, binôme de Newton

- Notation $\sum$, factorisation dans une somme. Scission d'une somme d'additions en deux sommes.
- Sommes classiques : $\sum_{k=0}^n k$, $\sum_{k=0}^n k^2$, $\sum_{k=0}^n a^k$.
- Sommes télescopiques. Découpage de somme sur une partition de l'ensemble des indices.
- Décalages d'indices.
- Notation $\prod$ et propriétés du produit.
- Conventions sur les sommes vides et les produits vides.
- Regroupement de facteurs dans un produit, découpage sur une partition des indices, produit télescopique.
- Définition de la factorielle et des coefficients binomiaux.
- Symétrie des coefficients binomiaux, formule de Pascal, triangle de Pascal.
- Binôme de Newton. Factorisation de $x^n - y^n$.
- Transformation de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en polynôme de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
- Linéarisation de polynômes trigonométriques.
- Sommes de fonctions circulaires $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$ par exponentielle et somme géométrique.
- **Sommes doubles** : Sommes sur un rectangle $\sum_{1 \leq i, j \leq a_{i,j}}$ ou un triangle $\sum_{1 \leq i \leq j \leq a_{i,j}}$ et $\sum_{1 \leq i < j \leq a_{i,j}}$ de $\mathbb{N}$.
Découpage selon les lignes ou les colonnes de ces sommes.

Questions de cours

- Calcul de $\sum_{k=0}^n k^2$ et $\sum_{k=0}^n a^k$.
- Citer le théorème du binôme de Newton, le théorème de factorisation de $x^n - y^n$ et démontrer ce dernier théorème.
- Formule de Pascal + démonstration du cas $1 \leq p \leq n$.
- Calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- Linéariser $\cos^3(\theta) \sin^2(2\theta)$.
- Calcul de la somme double $\sum_{1 \leq i, j \leq n} i + j$.