

Programme de colle n°7 : Fonctions réelles: Rappels et compléments

14/11 → 18/11

Généralités sur les fonctions réelles

- Domaine de définition (somme, produit, inverse, composée). Notation $\circ$ pour les composées.
- Graphe d'une fonction réelle, lien graphe-propriétés. Seules les transformations donnant les courbes de $x \mapsto a + f(x)$, $x \mapsto f(a + x)$ et $x \mapsto af(x)$ à partir de f sont dans le cours.
- Fonctions paires, impaires, périodiques, majorées, minorées, bornées, maximum, minimum. Monotonie.
- Limites d'une fonction. Théorèmes généraux sur les limites de sommes, produits et inverses.
- Continuité. Théorèmes généraux sur la continuité de sommes, produits, inverses et composées. Les fonctions usuelles sont continues.
- Dérivation. Définition, Théorèmes généraux sur la dérivabilité de sommes, produits, inverses et composées. Dérivabilité des fonctions usuelles. Dérivées successives. Équation de la tangente en un point. On autorise la notation $\frac{d}{dx}(f(x))$ pour exprimer des dérivées.
- Dérivées usuelles, dérivée d'un produit, d'un quotient, d'une composée.
- Lien entre signe de la dérivée et croissance. (Version fine ou la dérivée s'annule en un nombre fini de points et la fonction est strictement (dé)-croissante)
- Plan d'étude d'une fonction réelle. (Domaine de def, réduction du domaine, continuité, limites aux bornes, dérivabilité, dérivée, tableau de variations, tangentes, asymptotes, tracé du graphe)

Fonctions réelles usuelles

- Les fonctions circulaires ont été étudiées dans le chapitre de trigonométrie, on peut y faire appel à volonté.
- **Exponentielle** : Définition, domaine, dérivabilité, dérivée, tableaux de variations, Relations produit-somme, quotient-différence, puissance. Limites. Inégalité $\exp(x) \geq x + 1$. Limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.
- **Cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique** : Définition comme parties paires et impaires de $\exp$, domaine de dérivabilité, dérivée, tableaux de variations, limites. $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$.
- **Logarithme népérien** : Définition comme primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, domaine de dérivabilité, la dérivée, le tableaux de variations, Relations produit-somme, quotient-différence, puissance. Limites. Inégalité $\ln(x) \leq x - 1$. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$.
- **Logarithme en base a pour $a > 1$** : Définition, propriétés découlant de celles de $\ln$. Principalement logarithme binaire et logarithme décimal.
- **Puissances d'un réel** : Définition de x^a pour $a \in \mathbb{R}$ et $x > 0$. Propriétés de base du calcul de puissances. Fonctions puissances. Continuité, dérivabilité, dérivée, monotonie, tableau de variations.
- **Croissances comparées** :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^a}{x^b} = 0 \text{ pour } a \in \mathbb{R} \text{ et } b > 0. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^b |\ln(x)|^a = 0 \text{ pour } a \in \mathbb{R} \text{ et } b > 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = 0 \text{ pour } a > 0 \text{ et } b \in \mathbb{R}. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^b e^{ax} = 0 \text{ pour } a > 0 \text{ et } b > 0.$$

Fonctions bijectives et fonctions circulaires réciproques

- Définition de fonction bijective, fonction réalisant une bijection. Continuité et stricte monotonie implique bijection. **Attention** : L'injectivité et la surjectivité n'ont pas encore été abordées.
- Réciproque d'une bijection. Propriétés de la réciproque : Monotonie, continuité, dérivabilité, dérivée, symétrie du graphe avec celui de f .
- **Arc-cosinus, Arc-sinus, Arc-tangente** : Définitions comme bijection réciproque de restriction des fonctions circulaire, monotonie, parité, dérivabilité, dérivée. Allures des fonctions.
 $\cos(\operatorname{Arcsin}(x)) = \sin(\operatorname{Arccos}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.

Questions de cours

- Pour les fonctions $x \mapsto x^\pi$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \ln|x|$, $\cos$ et $\tan$, donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$. (Démonstration)
- Croissance comparée : Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et en déduire que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$.
- Définir ch et sh , donner domaine de dérivabilité et dérivée. (+ Démonstration des dérivées).
- Dérivabilité et dérivée de Arcsin (avec démonstration).
- Dérivabilité et dérivée de Arccos (avec démonstration).
- Dérivabilité et dérivée de Arctan (avec démonstration).