# Programme de colle n°9 : Complexes 2. Intégrales et primitives

28/11 $\to$ 2/12

### Équations et géométrie complexes. Fonctions à valeurs complexes.

- Si $\alpha$ est un racine de l'expression polynomiale $P(z)$, alors celle-ci se factorise par $z-\alpha$.
- Recherche de racines carrées sous forme algébrique ou sous forme forme exponentielle.
- Equations du second degré à coefficients complexes : Racines, cas des coeffs réels avec racines conjuguées, relations coefficients-racines, systèmes somme-produit.
- Racines $n$-ièmes de l'unité.
- Racines $n$-ièmes d'un complexe quelconque.
- Géométrie plane. Utilisation de $\frac{c-a}{b-a}$ pour obtenir le ratio des distances $AB$ et $AC$ et une mesure de l'angle $((\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}))$. Application à l'alignement ou l'orthogonalité.
- Transformation du plan : Représentation des rotations, translations, homothéties et symétries ortho.
- Partie réelle et imaginaire d'une fonction.
- Dérivabilité d'une fonction à valeurs complexes. Opérations sur les dérivées.
- Dérivée de $t \mapsto \exp(\varphi(t))$ lorsque $\varphi$ est à valeurs complexes.

### Primitives et intégrales

- Primitives des fonctions réelles. Les fonctions continues ont des primitives. Existence et unicité de la primitive qui s'annule en un point donné. Lien primitive-dérivée.
- Notation $\displaystyle\int^x f(t)\mathrm{d}t$ pour noter la valeur en $x$ d'une primitive quelconque de $f$ (en travaillant ainsi « à constante près »).
- Primitives usuelles : puissances, ln, exp, sin, cos, tan, ch, sh, $1+\tan^2$, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$,
- Primitives de dérivées de composées usuelles.
- Techniques classiques : Linéarisation de polynômes trigonométriques, décomposition en éléments simples des fractions rationnelles $x \mapsto \dfrac{px+q}{ax^2+bx+c}$.
- Intégration par partie. Cas des fonctions $x \mapsto P(x)\sin(ax)$, $x \mapsto P(x)\cos(ax)$, $x \mapsto P(x)\,\mathrm{e}^{ax}$ où $P$ est un polynôme. Astuce "du 1 qui se cache". Version « à constante près » avec la notation $\int^x f(t)\mathrm{d}t$.
- Changement de variable. Le changement de variable sera souvent donné, à moins d'être facile à trouver. Version « à constante près » avec la notation $\int^x f(t)\mathrm{d}t$.
- Pour les applications pratiques du changement de variable ou de l'intégration par parties, on ne demande plus de rappeler les hypothèses de régularité des fonctions mises en jeu.
- Primitives des $x \mapsto \dfrac{px+q}{ax^2+bx+c}$.
- Primitives des fonctions à valeurs complexes. Primitive de $x \mapsto e^{i\alpha x}$. Intégration et primitives de $x \mapsto e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et $x \mapsto e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ en passant en complexes.

### Questions de cours

- Théorème des racines $n$-ièmes de l'unité + démonstration.
- Déterminer les racines carrées de $-5-12i$ sous forme algébrique. On expliquera d'où proviennent les différentes lignes du système.
- Théorème sur les racines d'un trinôme du second degré + démonstration.
- Obtenir les expression des fonctions complexes associées aux transformations du plan suivantes :
  1. Rotation de centre $\Omega(2i)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
  2. Homothétie de centre $A(1+i)$ et de rapport 2.
- Pour $n \geqslant 2$, calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{i2k\pi/n}$ et $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{i2k\pi/n}$.
- Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$ en effectuant le changement de variable $t=\cos(u)$.
- Citer le théorème d'intégration par parties et déterminer une primitive de ln à l'aide d'une intégration par parties.