Programme de colle n°10 : Intégrales et primitives. Équations différentielles.

$5/12 \to 9/12$

Primitives et intégrales

- Primitives des fonctions réelles. Les fonctions continues ont des primitives. Existence et unicité de la primitive qui s'annule en un point donné. Lien primitive-dérivée.
- Notation $\displaystyle\int^x f(t)\mathrm{d}t$ pour noter la valeur en x d'une primitive quelconque de f (en travaillant ainsi « à constante près »).
- Primitives usuelles : puissances, ln, exp, sin, cos, tan, ch, sh, $1+\tan^2$, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$,
- Primitives de dérivées de composées usuelles.
- Techniques classiques : Linéarisation de polynômes trigonométriques, décomposition en éléments simples des fractions rationnelles $x \mapsto \dfrac{px+q}{ax^2+bx+c}$.
- Intégration par partie. Cas des fonctions $x \mapsto P(x)\sin(ax)$, $x \mapsto P(x)\cos(ax)$, $x \mapsto P(x)\,\mathrm{e}^{ax}$ où P est un polynôme. Astuce "du 1 qui se cache". Version « à constante près » avec la notation $\int^x f(t)\mathrm{d}t$.
- Changement de variable. Le changement de variable sera souvent donné, à moins d'être facile à trouver. Version « à constante près » avec la notation $\int^x f(t)\mathrm{d}t$.
- Pour les applications pratiques du changement de variable ou de l'intégration par parties, on ne demande plus de rappeler les hypothèses de régularité des fonctions mises en jeu.
- Primitives des $x \mapsto \dfrac{px+q}{ax^2+bx+c}$.
- Primitives des fonctions à valeurs complexes. Primitive de $x \mapsto e^{i\alpha x}$. Intégration et primitives de $x \mapsto e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et $x \mapsto e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ en passant en complexes.

Équations différentielles linéaires

- **Équations différentielles linéaires d'ordre 1** : $y' + a(t)y = b(t)$ avec a et b continues sur I un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Équation homogène associée, solutions de l'équation homogène, recherche de solutions particulières par variation de la constante (et donc existence d'une solution particulière). Structure des solutions de l'équation générale. Problème de Cauchy.
- **Équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants** : $y'' + ay' + by = c(t)$ avec a, b complexes ou réels et c continue sur $\mathbb{R}$. Équation caractéristique, solutions à valeurs complexes de l'équation homogène, solutions à valeurs réelles de l'équation homogène (cas des coeffs réels). Structure des solutions de l'équation.
- Méthodes de recherche des solutions particulières dans les cas suivants : c est un polynôme, $B\,\mathrm{e}^{kt}$, $B\sin(\omega t)$ et $B\cos(\omega t)$. (+ Passage aux complexes pour les $\mathrm{e}^{kt}\cos(\omega t)$ et les $\mathrm{e}^{kt}\sin(\omega t)$).
- Superposition des solutions. Problème de Cauchy.

Questions de cours

- Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$ en effectuant le changement de variable $t = \cos(u)$.
- Citer le théorème d'intégration par parties et déterminer une primitive de ln à l'aide d'une intégration par parties.
- Définir ce qu'est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, donner ses solutions et démontrer que ce sont bien des solutions (on ne demande donc pas de prouver que ce sont les seules).
- Définir ce qu'est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients **complexes** constants, donner ses solutions **à valeurs complexes** et démontrer que ce sont bien des solutions dans le cas $\Delta \neq 0$ (on ne demande donc pas de prouver que ce sont les seules).
- Déterminer les solutions **à valeurs réelles** des équations différentielles suivantes :

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \qquad y'' + 2y' + 5y = 0 \qquad y'' - 3y' + 2y = 0.$$

- Définition du problème de Cauchy à l'ordre 1 et unicité de la solution (avec démonstration).