

Programme de colle n°11 : Équations différentielles. Ensembles. Arithmétique.

12/12 → 16/12

Équations différentielles linéaires

- **Équations différentielles linéaires d'ordre 1** : $y' + a(t)y = b(t)$ avec a et b continues sur I un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Équation homogène associée, solutions de l'équation homogène, recherche de solutions particulières par variation de la constante (et donc existence d'une solution particulière). Structure des solutions de l'équation générale. Problème de Cauchy.
- **Équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants** : $y'' + ay' + by = c(t)$ avec a, b complexes ou réels et c continue sur $\mathbb{R}$. Équation caractéristique, solutions à valeurs complexes de l'équation homogène, solutions à valeurs réelles de l'équation homogène (cas des coeffs réels). Structure des solutions de l'équation.
- Méthodes de recherche des solutions particulières dans les cas suivants : c est un polynôme, $B e^{kt}$, $B \sin(\omega t)$ et $B \cos(\omega t)$. (+ Passage aux complexes pour les $e^{kt} \cos(\omega t)$ et les $e^{kt} \sin(\omega t)$).
- Superposition des solutions. Problème de Cauchy.

Ensembles et applications

- Rappels sur les ensembles : Inclusion, preuve d'égalité par double inclusion. Opérations sur les ensembles. Partitions. Produit cartésien d'ensembles.
- Ensemble des parties d'un ensemble. Recouvrement disjoint, partition.
- Applications : Définition, image, antécédent, notations $\mathcal{F}(E, F)$ et F^E . Ensemble image, restriction, prolongement.
- Images directes et images réciproques d'une partie. La notation temporaire $u^r(B)$ a été utilisée pour plus de clarté pendant le cours, mais elle ne doit pas être utilisée dans les exercices.
- Applications injectives, surjective, bijectives.
- Composition d'applications. Associativité. Si u et v injectives alors $u \circ v$ aussi (Idem pour surjective ou bijective). ATTENTION : la "réciproque faible" $u \circ v$ injective implique v injective a été vue en TD mais n'est pas dans le cours. Il faut la redémontrer si on veut l'utiliser. (Idem pour surjective)
- Bijection réciproque. Caractérisation des bijections par existence de v telle que $u \circ v = Id$ et $v \circ u = Id$. Réciproque d'une composée.
- Famille d'éléments indexée par un ensemble.

Arithmétique dans $\mathbb{N}$

- Diviseurs et multiples. Linéarité.
- Division euclidienne.
- PGCD, PPCM. Entiers premiers entre eux. Algorithme d'Euclide.
- Nombres premiers. Décomposition d'un nombre en facteurs premiers. Application au calcul du PGCD et du PPCM. $ab = \text{PGCD}(a, b) \text{ PPCM}(a, b)$. Il existe une infinité de nombres premiers.

Questions de cours

- Définir ce qu'est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, donner ses solutions et démontrer que ce sont bien des solutions (on ne demande donc pas de prouver que ce sont les seules).
- Définir ce qu'est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients **complexes** constants, donner ses solutions à **valeurs complexes** et démontrer que ce sont bien des solutions dans le cas $\Delta \neq 0$ (on ne demande donc pas de prouver que ce sont les seules).
- Déterminer les solutions à **valeurs réelles** des équations différentielles suivantes :

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \qquad y'' + 2y' + 5y = 0 \qquad y'' - 3y' + 2y = 0.$$

- Montrer que si A, B sont des parties de E , alors $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. (Par double inclusion)
- Montrer que si $u : E \rightarrow F$ et $B \subset B' \subset F$, alors $u^{-1}(B) \subset u^{-1}(B')$.
- La composée de 2 injections est une injection. (Écrire l'énoncé correct et le montrer)
- La composée de 2 surjections est une surjection. (Écrire l'énoncé correct et le montrer)
- Théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$ plus démonstration de l'unicité.