

Programme de colle n°12 : Ensembles. Arithmétique. Réels

3/1 → 6/1

Ensembles et applications

- Rappels sur les ensembles : Inclusion, preuve d'égalité par double inclusion. Opérations sur les ensembles. Partitions. Produit cartésien d'ensembles.
- Ensemble des parties d'un ensemble. Recouvrement disjoint, partition.
- Applications : Définition, image, antécédent, notations $\mathcal{F}(E, F)$ et F^E . Ensemble image, restriction, prolongement.
- Images directes et images réciproques d'une partie. La notation temporaire $u^r(B)$ a été utilisée pour plus de clarté pendant le cours, mais elle ne doit pas être utilisée dans les exercices.
- Applications injectives, surjective, bijectives.
- Composition d'applications. Associativité. Si u et v injectives alors $u \circ v$ aussi (Idem pour surjective ou bijective). ATTENTION : la "réciproque faible" $u \circ v$ injective implique v injective a été vue en TD mais n'est pas dans le cours. Il faut la redémontrer si on veut l'utiliser. (Idem pour surjective)
- Bijection réciproque. Caractérisation des bijections par existence de v telle que $u \circ v = Id$ et $v \circ u = Id$. Réciproque d'une composée.
- Famille d'éléments indexée par un ensemble.

Suites réelles et complexes

- Définition des suites (explicites, implicites, récurrentes), opérations sur les suites. Suites constantes, stationnaires, monotones, majorées, minorées, bornées.
- Convergence des suites réelles : Suites convergentes, divergentes vers $\pm\infty$, divergentes sans limites, unicité de la limite. Opérations sur les limites.
- Suites extraites. Les suites-extraites ont même limite que la suite d'origine. Si les suites des termes de rang pairs et impairs ont une même limite, alors la suite originale aussi.
- Limites et relation d'ordre : Comparaison de suites, théorème des gendarmes, théorème du gendarme, limites des suites monotones (Toute suite monotone a une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$). « Le produit d'une suite bornée et d'une suite qui converge vers 0 converge vers 0 »
- Suites adjacentes.
- Croissances comparées : logarithme, monôme, puissances, factorielle.
- Suites complexes. Définition de la convergence avec ε , caractérisation en partie réelle et imaginaire. Opérations sur les limites.
- Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques
- Suites récurrentes doubles (résolution réelle et complexe).

Questions de cours

- Soit $u : E \rightarrow F$ une application, A, A' des parties de E et B, B' des parties de F .
Donner la définition de $u(A)$ et de $u^{-1}(B)$.
Montrer que si $B \subset B' \subset F$, alors $u^{-1}(B) \subset u^{-1}(B')$.
- Donner les trois définitions d'application injective. Montrer que la composée de 2 injections est une injection. (Écrire l'énoncé correct et le montrer)
- Donner les trois définitions d'application surjective. Montrer que la composée de 2 surjections est une surjection. (Écrire l'énoncé correct et le montrer)
- Montrer que toute suite convergente est bornée.
- Montrer l'unicité de la limite d'une suite convergente.
- Théorème des gendarmes. (Énoncé+Démonstration)
- Suites adjacentes : Définition, théorème sur la convergence. On veillera à bien distinguer la définition et le résultat. Pour la démonstration du théorème, on admettra que u et v adjacentes (u croissante) implique $u_n \leq v_n$ pour tout n (Lemme 14.50)
- Déterminer le terme général de la suite (u_n) vérifiant $u_0 = 1, u_1 = \pi, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.