Programme de colle n°14 : Matrices

16/1 → 20/1

Matrices

- Définitions (matrices à coeffs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, matrices-lignes, matrices-colonnes, format d'une matrice, lignes, colonnes, matrices carrées, matrices triangulaires inf. et sup., diagonales, scalaires, identité, matrice nulle) notation $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Calcul matriciel. Addition, multiplication interne, multiplication externe. Propriétés de ces opérations (En gros, la structure d'anneau non-commutatif). Binôme de Newton pour les matrices.
- Symbole de Kronecker. Matrices élémentaires. Toute matrice est une combinaison linéaire de matrices élémentaires.
- Matrices carrées inversibles. Notation $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Inversible à gauche $\Leftrightarrow$ Inversible à droite $\Leftrightarrow$ Inversible. Simplification multiplicative par une matrice inversible. Caractérisation A inversible $\Leftrightarrow \forall Y,\ AX = Y$ a une unique solution.
- Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si sa diagonale ne contient pas de 0. Cas diagonal.
- Transposition. $(AB)^T = B^T \times A^T$. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$. Matrices symétriques et antisymétriques. A^T est désormais la seule notation officielle de la transposée.
- Lien entre systèmes linéaires et calcul matriciel. Structure des solutions.
- Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. Traduction matricielle. Pas de matrices équivalentes par lignes ou par colonnes. Toutefois, la notation $\sim_L$ a été utilisée pour faciliter la rédaction
- L'échelonnement a presque entièrement disparu du programme. Les termes et notions de matrices échelonnées ne sont plus vues. Seul demeure la méthode du pivot sur $(A \mid I_n)$ pour inverser A.
- Suppression des caractérisations des matrices carrées inversibles liées à l'échelonnement.

Questions de cours

- Donner la définition du produit de deux matrices (on définira bien tout ce qui apparait).
  Citer les propriétés du produit (associativité, distributivité, et « commutativité » avec la multiplication par une constante, Prop 16.31)
  Exhiber un produit nul de deux matrices non-nulles.
- Donner la définition de matrice triangulaire supérieure.
  Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
- Citer le binôme de Newton pour les matrices.
  Donner la définition de matrice inversible.
  Démontrer que le produit de deux matrices inversibles est inversible.
- Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. (Faite en TD)