

Programme de colle n°16 : Polynômes

$30/1 \rightarrow 3/2$

Polynômes

- **Définitions** : Polynômes à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, addition, multiplications internes et externes. Indéterminée. Ensemble $\mathbb{K}[X]$. Composition. Formule du binôme.
- **Degré** : Degré d'un polynôme. Comportement du degré vis à vis des opérations. Ensembles $\mathbb{K}_n[X]$. Méthode de Hörner pour l'évaluation rapide.
- **Fonctions polynômiales**. On a noté $\tilde{P}$ la fonction polynômiale associée à P .
- **Polynôme dérivé** : Définition (formule). Dérivées n -ièmes. Dérivée l -ième de X^n . Formule de Leibniz.
- **Formules de Taylor** : Formule de Taylor en 0. Formule de Taylor en un point quelconque.
- **Arithmétique des polynômes** : Diviseurs, multiples, propriétés de la division.
- **Division euclidienne** : Existence et unicité de la division euclidienne. Reste nul équivaut à divisible. Méthode de calcul en pratique.
- **Racines** : Le reste de la division euclidienne de P par $X - \alpha$ est $\tilde{P}(\alpha)$. Définition d'une racine. Définition d'une racine de multiplicité n par la divisibilité de P par $(X - \alpha)^n$ mais pas par $(X - \alpha)^{n+1}$. Caractérisation par l'annulation des dérivées successives de $\tilde{P}$ en α jusqu'à $\tilde{P}^{(n-1)}(\alpha)$ mais pas $\tilde{P}^{(n)}(\alpha)$.
- **Factorisation** : Polynômes scindés. Un polynôme a moins de racines avec multiplicité que son degré. Lien entre les racines de multiplicité ≥ 2 et les racines de P' .
- **Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$** : Théorème de D'Alembert-Gauss. Les polynômes sur $\mathbb{C}$ sont scindés. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$. Les racines complexes des polynômes réels sont conjuguées. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.
- **Relations coefficients-racines** : Seule les relations sur la somme et le produit des coefficients sont exigibles, les autres fonctions symétriques sont hors-programme en PTSI. Système produit-somme en degré 2.
- **Fonctions rationnelles** : Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ des fonctions rationnelles à pôles simples. Applications. On peut étudier des fonctions rationnelles plus compliquées, mais dans ce cas la forme recherchée doit être fournie.

Questions de cours

- Théorème de la division euclidienne + Démonstration de l'unicité.
- Dérivée l -ième de X^n + Démonstration.
- Citer la caractérisation des racines de multiplicité n et le théorème de décomposition des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$. Décomposer $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
- Formule de Taylor en a + Démonstration en 0.
- Définition de polynômes irréductibles. Descriptions des polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ (sans démonstration). Décomposer $X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.