Programme de colle n°17 : Limites, continuité

$6/2 \to 10/2$

Limites des fonctions d'une variable réelle

- Propriétés locales des fonctions : Notion de voisinage (ouvert). Extremum local.
- Limites finies ou infinies en un point de l'ensemble de définition de f ou en une de ses extrémités. Unicité de la limite.
- Propriétés des limites finies : Limite finie implique bornée sur un voisinage. Limite strictement positive implique strictement positive sur un voisinage.
- Limite à gauche et à droite.
- Si f est définie en a et admet une limite en a, cette limite est $f(a)$.
- Somme, produit, quotient, composée de limites.
- Passage à la limite dans les inégalités. Théorème des gendarmes.
- Caractérisation séquentielle de la limite.
- Fonctions monotones et limites (Tous les cas possibles)
- Limites des fonctions à valeurs complexes. Opérations sur les limites.
  f converge vers $l \Leftrightarrow Re(f)$ et $Im(f)$ convergent vers $Re(l)$ et $Im(l)$.

Continuité des fonctions réelles

- Fonctions continue en un point (la continuité est équivalente à l'existence d'une limite puisque celle-ci ne peut être que la valeur de la fonction en ce point). Prolongement par continuité. Continuité à gauche et à droite. Continuité sur un ensemble.
- Opérations sur la continuité. Propriétés locales des fonctions continues (bornitude, signe)
- Continuité et suites convergentes.
- Théorème des valeurs intermédiaires. Généralisation sur des intervalles quelconques.
- Image d'un segment par une fonction continue (Théorème de la borne atteinte).
- Une fonction strictement monotone est injective.
- Théorème de la bijection. L'énoncé vu en classe est :
  Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction *continue* et *strictement monotone* sur un intervalle I. Alors
  1. $f(I)$ est un intervalle dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I.
  2. f réalise une bijection de I sur $f(I)$. Autrement dit, la fonction $\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} I & \to & f(I) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est une bijection.
  3. La réciproque de $\widetilde{f}$ est continue.
- Continuité des fonctions à valeurs complexes.

Questions de cours

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Définitions avec quantificateurs de :
  $\triangleright f$ a une limite b en a lorsque a et b sont finis.
  $\triangleright f$ tends b en $+\infty$.
  On illustrera chaque définition par le dessin adéquat, que l'on expliquera.
- Caractérisation séquentielle de la limite (sans démonstration) + Montrer que sin n'a pas de limite en $+\infty$. (18.34 et 18.36).
- Citer le TVI. Montrer que $f : [a, b] \to [a, b]$ continue admet un point fixe. (On attend, en illustration de la preuve, un joli dessin explicatif).
- Citer le Théorème de la bijection et le Théorème des bornes atteintes.
- Corollaire sur les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ + Démonstration. La démonstration devra notamment comporter la preuve que la suite est bien définie. L'énoncé attendu est

> Soient $a \leqslant b$ deux réels et $f : [a, b] \to [a, b]$ continue.
> Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 \in [a, b]$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
> Si (u_n) est convergente, alors sa limite est un élément ℓ de $[a, b]$ qui vérifie $f(\ell) = \ell$.