Programme de colle n°18 : Limites, continuité, dérivabilité

27/2 → 3/3

Limites des fonctions d'une variable réelle

- Propriétés locales des fonctions : Notion de voisinage (ouvert). Extremum local.
- Limites finies ou infinies en un point de l'ensemble de définition de f ou en une de ses extrémités. Unicité de la limite.
- Propriétés des limites finies : Limite finie implique bornée sur un voisinage. Limite strictement positive implique strictement positive sur un voisinage.
- Limite à gauche et à droite.
- Si f est définie en a et admet une limite en a , cette limite est $f(a)$.
- Somme, produit, quotient, composée de limites.
- Passage à la limite dans les inégalités. Théorème des gendarmes.
- Caractérisation séquentielle de la limite.
- Fonctions monotones et limites (Tous les cas possibles)
- Limites des fonctions à valeurs complexes. Opérations sur les limites.
 f converge vers $l \Leftrightarrow \operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ convergent vers $\operatorname{Re}(l)$ et $\operatorname{Im}(l)$.

Continuité des fonctions réelles

- Fonctions continue en un point (la continuité est équivalente à l'existence d'une limite puisque celle-ci ne peut être que la valeur de la fonction en ce point). Prolongement par continuité. Continuité à gauche et à droite. Continuité sur un ensemble.
- Opérations sur la continuité. Propriétés locales des fonctions continues (bornitude, signe)
- Continuité et suites convergentes.
- Théorème des valeurs intermédiaires. Généralisation sur des intervalles quelconques.
- Image d'un segment par une fonction continue (Théorème de la borne atteinte).
- Une fonction strictement monotone est injective.
- Théorème de la bijection. L'énoncé vu en classe est :
 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction *continue* et *strictement monotone* sur un intervalle I . Alors
 1. $f(I)$ est un intervalle dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I .
 2. f réalise une bijection de I sur $f(I)$. Autrement dit, la fonction $\tilde{f} : \begin{matrix} I & \rightarrow & f(I) \\ x & \mapsto & f(x) \end{matrix}$ est une bijection.
 3. La réciproque de $\tilde{f}$ est continue.
- Continuité des fonctions à valeurs complexes.

Dérivabilité des fonctions réelles

- Dérivabilité en un point et généralités : Développement limité à l'ordre 1. Dérivable implique continue. Interprétation graphique et tangentes. Fonction dérivée.
- Dérivabilité à gauche et à droite. f dérivable en a ssi dérivable à gauche et à droite en a de même dérivée.
- Opérations sur les fonctions dérivables et dérivées : Somme, produit, combinaison linéaire, inverse, quotient, composée, bijection réciproque.
- Dérivées successives. Fonctions de classes $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$.
- Opérations sur les dérivées n -ièmes : Somme, produit (et Formule de Leibniz), quotient, composée, bijection réciproque. (Pas de formule pour la composition)
- Notion de point critique. Extrema locaux : Extremum $\Rightarrow$ point critique. Théorème de Rolle.
- Égalité des accroissements finis. Fonctions lipschitziennes. Inégalités des accroissements finis : 2 versions.
 $\forall 1 : m \leq f' \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$. $\forall 2 : |f'| \leq k \Rightarrow f$ k -lipschitzienne.
- Équivalence entre signe non-strict de la dérivée et monotonie non-strict. Version "stricte" : f de signe de constant et ne s'annulant pas sur un intervalle contenant au moins 2 points $\Rightarrow f$ strictement monotone.
- Théorème de la limite de la dérivée.
- Dérivation des fonctions à valeurs complexes.

Questions de cours

- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Définitions avec quantificateurs de :
 - ▷ f a une limite b en a lorsque a et b sont finis.
 - ▷ f tend vers b fini en $+\infty$.On illustrera chaque définition par le dessin adéquat, que l'on expliquera.
- Caractérisation séquentielle de la limite (sans démonstration) + Montrer que $\sin$ n'a pas de limite en $+\infty$. (18.34 et 18.36).
- Citer le théorème des valeurs intermédiaires. Montrer que $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continue admet un point fixe. (On attend, en illustration de la preuve, un joli dessin explicatif).
- Citer le théorème de la bijection et le théorème des bornes atteintes.
- Corollaire sur les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ + Démonstration. La démonstration devra notamment comporter la preuve que la suite est bien définie. L'énoncé attendu est

Soient $a \leq b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continue.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 \in [a, b]$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Si (u_n) est convergente, alors sa limite est un élément ℓ de $[a, b]$ qui vérifie $f(\ell) = \ell$.

- Lien entre extremum local et dérivée (+Démonstration) (Thm 19.43)
- Théorème de Rolle (+Démonstration) (Thm 19.45)
- Citer le théorème de Leibniz et le théorème de la limite de la dérivée. (19.34 et 19.60)