

Programme de colle n°19 : Dérivabilité, comparaisons locales des fonctions

6/3 → 10/3

Dérivabilité des fonctions réelles

- Dérivabilité en un point et généralités : Développement limité à l'ordre 1. Dérivable implique continue. Interprétation graphique et tangentes. Fonction dérivée.
- Dérivabilité à gauche et à droite. f dérivable en a ssi dérivable à gauche et à droite en a de même dérivée.
- Opérations sur les fonctions dérivables et dérivées : Somme, produit, combinaison linéaire, inverse, quotient, composée, bijection réciproque.
- Dérivées successives. Fonctions de classes \mathcal{C}^n et \mathcal{C}^∞ .
- Opérations sur les dérivées n -ièmes : Somme, produit (et Formule de Leibniz), quotient, composée, bijection réciproque. (Pas de formule pour la composition)
- Notion de point critique. Extrema locaux : Extremum \Rightarrow point critique. Théorème de Rolle.
- Égalité des accroissements finis. Fonctions lipschitziennes. Inégalités des accroissements finis : 2 versions.
V1 : $m \leq f' \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$. V2 : $|f'| \leq k \Rightarrow f$ k -lipschitzienne.
- Équivalence entre signe non-strict de la dérivée et monotonie non-stricte. Version "stricte" : f de signe de constant et ne s'annulant pas sur un intervalle contenant au moins 2 points $\Rightarrow f$ strictement monotone.
- Théorème de la limite de la dérivée.
- Dérivation des fonctions à valeurs complexes.

Comparaisons des fonctions réelles et des suites.

- Relations de domination, négligeabilité, équivalence. Caractérisations par l'étude du quotient.
- Règles de calculs pour ces relations. Pré-composition par une fonction ayant la bonne limite.
- Comparaisons classiques : Croissances comparées, polynômes, limite finie.
- Théorème des gendarmes pour les équivalents.
- Si $f'(a) \neq 0$ alors $f(x) - f(a) \sim_a f'(a)(x - a)$.
- Équivalents classiques en 0 : $\sin(x)$ $\tan(x)$ $\ln(1+x)$ $e^x - 1$ $(1+x)^\alpha - 1$ $1 - \cos(x)$
- Techniques d'obtention d'un équivalent de $\ln(u(x))$ selon la limite de u .
- La même chose, mais pour les suites.

Questions de cours

- Dérivée d'un produit en un point (+Démonstration).
- Lien entre extremum local et dérivée (+Démonstration).
- Théorème de Rolle (+Démonstration) .
- Citer le théorème de Leibniz et le théorème de la limite de la dérivée.
- Demander les équivalents classiques concernant \cos , \exp , \tan et $x \mapsto x^\alpha$ puis utiliser des équivalents pour déterminer la limite de la suite de terme général $\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{n(n+1)}$.