

Programme de colle n°20 : Comparaisons locales des fonctions, développements limités, suites récurrentes

13/3 → 17/3

Comparaisons des fonctions réelles et des suites.

- Relations de domination, négligeabilité, équivalence. Caractérisations par l'étude du quotient.
- Règles de calculs pour ces relations. Pré-composition par une fonction ayant la bonne limite.
- Comparaisons classiques : Croissances comparées, polynômes, limite finie.
- Théorème des gendarmes pour les équivalents.
- Si $f'(a) \neq 0$ alors $f(x) - f(a) \sim_a f'(a)(x - a)$.
- Équivalents classiques en 0 : $\sin(x) \sim \tan(x) \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim (1+x)^\alpha - 1 \sim 1 - \cos(x)$
- Techniques d'obtention d'un équivalent de $\ln(u(x))$ selon la limite de u .
- La même chose, mais pour les suites.

Développements limités.

- Formule de Taylor-Young.
- Développement limités en un point.
- Existence d'un développement d'ordre n pour les fonctions de classe \mathcal{C}^n .
- Unicité, troncature, DL de fonctions paires/impaires. Intégration d'un développement limité.
- DL usuels en 0 : \exp , ch , sh , \cos , \sin , $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, Arcsin et Arctan à tous les ordres. (Ceux de Arctan et Arcsin sont plutôt à savoir retrouver). \tan à l'ordre 3.
- Opération sur les DL : Somme, produit (avec optimisation des ordres), composées, quotients.
- Applications : Limites, prolongements par continuité, équivalents, recherche de tangentes (et position relative), extremum local. Recherche d'asymptote grâce à un développement asymptotique.

Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Partie stable et bonne définition de (u_n) .
- Sens de variation selon la monotonie de f .
- Exemples d'études de suites : Cas où f est continue (point fixe). Cas où f est contractante. (L'unicité du point fixe n'est pas au programme, il faut le faire redémontrer)

Questions de cours

- Équivalents classiques concernant \cos , \exp , \tan et $x \mapsto x^\alpha$ puis utiliser des équivalents pour déterminer la limite de la suite de terme général $\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{n(n+1)}$.
- Démonstration du DL à l'ordre n en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$. En déduire le DL à l'ordre n de Arctan en 0.
- Donner (sans démonstration) le DL en 0 à l'ordre n de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ où α est une constante. En déduire les DL en 0 à l'ordre 3 de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et celui de Arcsin.
- Donner (sans démonstration) les DL en 0 à l'ordre 6 de \exp , \sin , \cos , ch , sh et $x \mapsto \ln(1+x)$. Donner le DL en 0 à l'ordre 3 de \tan .
- Déterminer l'asymptote en $+\infty$ de $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$ ainsi que la position de la courbe de f par rapport à cette asymptote.
- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction contractante, α est un point fixe de f et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .