Programme de colle n°21 : Développements limités, suites récurrentes

$20/3 \to 24/3$

Développements limités.

- Formule de Taylor-Young.
- Développement limités en un point.
- Existence d'un développement d'ordre n pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$.
- Unicité, troncature, DL de fonctions paires/impaires. Intégration d'un développement limité.
- DL usuels en 0 : exp, ch, sh, cos, sin, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, Arcsin et Arctan à tous les ordres. (Ceux de Arctan et Arcsin sont plutôt à savoir retrouver). tan à l'ordre 3.
- Opération sur les DL : Somme, produit (avec optimisation des ordres), composées, quotients.
- Applications : Limites, prolongements par continuité, équivalents, recherche de tangentes (et position relative), extremum local. Recherche d'asymptote grâce à un développement asymptotique.

Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Partie stable et bonne définition de (u_n).
- Sens de variation selon la monotonie de f.
- Exemples d'études de suites : Cas où f est continue (point fixe). Cas où f est contractante. (L'unicité du point fixe n'est pas au programme, il faut le faire redémontrer)

Questions de cours

- Démonstration du DL à l'ordre n en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$. En déduire le DL à l'ordre n de Arctan en 0.
- Donner (sans démonstration) le DL en 0 à l'ordre n de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ où α est une constante. En déduire les DL en 0 à l'ordre 3 de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et celui de Arcsin.
- Donner (sans démonstration) les DL en 0 à l'ordre 6 de exp, sin, cos, ch, sh et $x \mapsto \ln(1+x)$. Donner le DL en 0 à l'ordre 3 de tan.
- Déterminer l'asymptote en $+\infty$ de $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$ ainsi que la position de la courbe de f par rapport à cette asymptote.
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction contractante, α un point fixe de f et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
  Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.