

Programme de colle n°23 : Géométrie plane et spatiale

3/4 → 7/4

Géométrie dans le plan

- **Coordonnées cartésiennes** : Définitions de la projection sur une droite, combinaison linéaire de vecteurs, colinéarité (+caractérisation façon espaces-vectoriels), base vectorielle de $\vec{\mathcal{P}}$ (normée, orthogonale, orthonormée, directe). Repère cartésien de \mathcal{P} (normé, orthogonal, orthonormé, directe), coordonnées cartésiennes.
- **Coordonnées polaires** : Définition de repère polaire et de coordonnées polaires (Pas de formules de changements de repères au programme).
- **Produit scalaire** : Définition, caractérisation de l'orthogonalité. Relation $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$. Bilinearité, symétrie. Expression dans une base orthonormale. Norme d'un vecteur. Norme euclidienne dans \mathbb{R}^2 . Lignes de niveau de $M \mapsto \vec{u} \cdot \vec{AM}$ et de $M \mapsto [\vec{u}, \vec{AM}]$.
- **Produit mixte** : Définition, caractérisation de la colinéarité. Bilinearité, anti-symétrie. Aire du parallélogramme. Matrice d'une famille de vecteurs du plan. Déterminant d'une matrice 2×2 . Lien produit mixte déterminant dans une base orthonormée (et par conséquent expression du produit mixte).
- **Droites du plan** : Droites vectorielles, droites affines. Représentation paramétrique, cartésienne. Parallélisme, perpendicularité, vecteur normal, vecteur directeur. Demi-plans et leurs inéquations. Distance d'un point à une droite (et formule). Intersections de droites.
- **Cercles du plan** : Définition. Équation cartésienne. Intersection droite-cercle et cercle-cercle. Lieu des points tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.

Géométrie dans l'espace

- **Repérage dans l'espace** : Définitions de combinaison linéaire de vecteurs (et notation $\text{vect}(\vec{u}, \vec{v}, \dots)$), droite vectorielle, droite affine, plan vectoriel, plan affine. Vecteurs coplanaires, caractérisation par les combinaisons linéaires nulles. Base vectorielle. Coordonnées cartésiennes d'un vecteur. Repère cartésien. Coordonnées cartésiennes d'un point. Repère orthonormal, direct, indirect.
- **Coordonnées cylindriques** : Définition.
- **Produit scalaire** : Définition, caractérisation de l'orthogonalité. Propriétés. Expression dans une base orthonormale. Norme d'un vecteur. Norme euclidienne dans \mathbb{R}^3 .
- **Produit vectoriel** : Définition, caractérisation de la colinéarité. Propriétés. Aire du parallélogramme. Coordonnées dans une base orthonormale.
- **Produit mixte** : Définition, caractérisation de la coplanarité. Trilinearité, anti-symétrie. Volume du parallélépipède. Matrice d'une famille de vecteurs de l'espace. Déterminant d'une matrice 3×3 . Formule de changement de base du produit mixte $([\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] \det_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}))$. Lien produit mixte déterminant dans une base orthonormée directe (et par conséquent expression du produit mixte).
- **Plans de l'espace** : Représentation paramétrique, cartésienne. Vecteur normal, vecteurs directeurs. Distance d'un point à un plan (et formule). Intersections de plans. Demi-espaces et leurs inéquations.
- **Droites de l'espace** : Représentation paramétrique, système d'équations cartésiennes. Distance d'un point à une droite. Positions relatives de 2 droites. Définition de perpendiculaire et orthogonal.
- **Sphères de l'espace** : Définition. Équation cartésienne. Intersection sphère-droite, sphère-plan et sphère-sphère.

Questions de cours

- Montrer que deux vecteurs du plan sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.
- Donner la formule du produit scalaire dans le plan dans une base (avec la condition sur la base) (+Démonstration).
- Dans le plan, donner et montrer la caractérisation du cercle de diamètre $[AB]$.
- Formule donnant la distance d'un point à une droite dans le plan (sans démonstration). Nature de l'intersection d'un cercle et d'une droite. (Avec dessins!).
- Dans l'espace muni d'un R.O.N.D., donner une équation du plan passant par les points $A(1, 0, -2)$, $B(0, 2, 1)$, $C(-1, -1, 0)$. Donner un vecteur normal de ce plan et la distance de $D(-2, 1, -3)$ à ce plan.
- Dans l'espace, définir le produit mixte, donner le lien avec la coplanarité et le démontrer.
- Dans l'espace, décrire l'intersection d'une sphère et d'un plan. (Les élèves doivent distinguer les cas selon la distance du centre de la sphère au plan)
Expliquer comment s'y ramener dans le cas de l'intersection de deux sphères.