# Programme de colle n°25 : Espaces vectoriels et dimension finie
$2/5 \to 5/5$

## Espaces vectoriels

- **Structure d'espace vectoriel**. Le vocabulaire "groupe", "anneau" et "corps" a été utilisé, mais rien n'est exigible à ce sujet en PTSI. De même, en PTSI, les espaces vectoriels sont exclusivement définis sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Propriétés et calculs dans un EV.
- **Exemples de $\mathbb{K}$-EV** : vecteurs du plan, de l'espace, $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})$ (dont $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$), $\mathcal{F}(\Omega, E)$ lorsque $E$ est un $\mathbb{K}$-EV.
- **Sous-espaces vectoriels :** Définition, caractérisation. Exemples nombreux. Intersection de s-ev.
- Combinaisons linéaires (finies), espace engendré par une famille de vecteurs finie. Notation Vect. Définition de droite vectorielle et de plan vectoriel.
- **Somme de s-ev.** Définition, minimalité, propriétés.
- **Sommes directes de s-ev.** Caractérisations : Par unicité de la décomposition de 0 ou par intersection réduite à 0.
- **Supplémentaires :** Définition, caractérisations.

## Dimension des espaces vectoriels et méthodes matricielles

- **Famille libre, génératrice, base.** Exemples des bases canoniques classiques $(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}_n[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))$.
- **Espace de dimension finie.** Thm de la base extraite, thm de la base incomplète. Tout espace de dimension finie a une base.
- **Espace de dimension finie.** Définition de la dimension. Dimension des espaces classiques. Relation entre cardinal d'une famille et caractère libre/générateur/base.
- **Cas des polynômes.** Une famille de polynômes non-nuls de degrés différents est libre.
- **Sous-espaces vectoriels.** Dimensions.
- **Rang d'une famille de vecteurs.** Comparaison au cardinal ou à la dimension de l'espace.
- **Somme de deux sous-espaces vectoriels.** Dimension et somme directe, supplémentaires, existence d'un supplémentaire. Calcul d'un supplémentaire à l'aide d'une complétion de base.
- Tout ce qui relève des méthodes matricielles n'a pas été vu.

## Questions de cours

- Définir $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ lorsque $\mathcal{F}$ est une famille finie et montrer que que c'est le plus petit sous-espace vectoriel de $E$ contenant $\mathcal{F}$.
- Citer la caractérisation 2 des sommes directes et la démontrer. (Celle avec $F \cap G = \{0\}$).
- Montrer que $F = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0,1]) \middle| \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0 \right\}$ et $G = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0,1]) \mid f \text{ est constante sur } [0,1] \right\}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{C}^0([0,1])$. (On admettra que ce sont des S-EV de $\mathcal{C}^0([0,1])$.
- Montrer que la famille $(\cos, \sin, \exp)$ est libre. (Fait en TD)
- Citer les théorèmes de la base incomplète et théorème de la base extraite + Montrer que toutes les bases d'un espace-vectoriel de dimension finie ont le même cardinal. *On admettra que toute famille libre a un cardinal inférieur à toute famille génératrice.*
- Montrer la proposition suivante : Soit $E$ un $\mathbb{K}-$EV et $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, , e_n)$ une famille de $E$. On note $F = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k)$ et $G = \mathrm{Vect}\,(e_{k+1}, \ldots, e_n)$.
  - ▷ Si $\mathcal{F}$ est libre, alors $F$ et $G$ sont en somme directe.
  - ▷ Si $\mathcal{F}$ est une base de $E$, alors $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$. de vecteurs.
- Énoncer la caractérisation des supplémentaires en dimension finie (27.43), la formule de Grassmann et définir le rang d'une famille finie.