Programme de colle n°26 : Applications linéaires

$9/5 \to 12/5$

Applications linéaires

- **Applications linéaires.** Définition, premières propriétés, structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$. Composition d'applications linéaires. La composition est bilinéaire.
- **Endomorphismes.** Endomorphismes, notation u^n.
- **Noyaux, images.** Définitions. Ce sont des sous-espaces vectoriels.
- Définition d'une application linéaire par ses restrictions sur deux espaces supplémentaires.
- **Injectivité, surjectivité, bijectivité.** Isomorphismes, automorphismes. Réciproque d'un isomorphisme. Composition d'isomorphismes. Lien entre injectivité et noyau.
- **Applications linéaires en dimension finie.** Image d'une famille de vecteurs. Définition d'une application linéaire par l'image d'une base. Rang d'une application linéaire. Lien entre l'image d'une base et injectivité, surjectivité, bijectivité et le rang.
- **Théorème du rang.** Forme géométrique et forme usuelle.
- **Isomorphismes**. Lien entre injectivité, surjectivité, bijectivité et dimension, espaces isomorphes si et seulement si de même dimension. Injectif $\Leftrightarrow$ Surjectif $\Leftrightarrow$ Bijectif lorsque les dimensions sont les mêmes au départ et à l'arrivée.
- **Projecteurs et symétries**. Définitions, caractérisations, méthodes pour trouver les éléments caractéristiques.

Questions de cours

- La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. (+Démo)
- Définir le rang d'une application linéaire (28.38). Citer le master Théorème (28.41). Que se passe-t-il lorsque les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension ? (28.43) Citer le théorème du rang. (28.47)

  L'énoncé attendu du "master Théorème" est

  Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, F un espace vectoriel de dimension p et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

  1. *f est injective* $\iff$ *$(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre* $\iff$ $\mathrm{rg}(f) = n$
  2. *f est surjective* $\iff$ *$(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est génératrice de F* $\iff$ $\mathrm{rg}(f) = p$
  3. *f est bijective* $\iff$ *$(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de F* $\iff$ $\mathrm{rg}(f) = p = n$

- Définir le noyau (28.18). Donner et démontrer la structure du noyau (28.19). Donner et démontrer le lien entre injectivité et noyau. (28.29)
- Définir et décrire les projecteurs. Étudier $f : (x, y) \mapsto (0, x + y)$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

  On attend : La définition générale d'une symétrie à l'aide des supplémentaires, un dessin, la caractérisation avec $p \circ p = p$ (sans preuve), les éléments caractéristiques exprimés comme des noyaux. Pour l'exemple, on veut la démonstration que c'est un projecteur et la recherche des éléments caractéristiques.
- Définir et décrire les symétries. Étudier $s : aX + b \mapsto bX + a$ définie sur $\mathbb{R}_1[X]$.

  On attend : Une définition générale à l'aide des supplémentaires, un dessin, la caractérisation avec $s \circ s = \mathrm{Id}$ (sans preuve), les éléments caractéristiques exprimés comme des noyaux. Pour l'exemple, on veut la démonstration que c'est une symétrie et la recherche des éléments caractéristiques.