Programme de colle n°27 : Applications linéaires, matrices, dénombrement

$22/5 \to 26/5$

Applications linéaires

- **Applications linéaires.** Définition, premières propriétés, structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$. Composition d'applications linéaires. La composition est bilinéaire.
- **Endomorphismes.** Endomorphismes, notation u^n.
- **Noyaux, images.** Définitions. Ce sont des sous-espaces vectoriels.
- Définition d'une application linéaire par ses restrictions sur deux espaces supplémentaires.
- **Injectivité, surjectivité, bijectivité.** Isomorphismes, automorphismes. Réciproque d'un isomorphisme. Composition d'isomorphismes. Lien entre injectivité et noyau.
- **Applications linéaires en dimension finie.** Image d'une famille de vecteurs. Définition d'une application linéaire par l'image d'une base. Rang d'une application linéaire. Lien entre l'image d'une base et injectivité, surjectivité, bijectivité et le rang.
- **Théorème du rang.** Forme géométrique et forme usuelle.
- **Isomorphismes**. Lien entre injectivité, surjectivité, bijectivité et dimension, espaces isomorphes si et seulement si de même dimension. Injectif $\Leftrightarrow$ Surjectif $\Leftrightarrow$ Bijectif lorsque les dimensions sont les mêmes au départ et à l'arrivée.
- **Projecteurs et symétries**. Définitions, caractérisations, méthodes pour trouver les éléments caractéristiques.

Ensembles finis et dénombrement

- **Cardinaux des ensembles finis.** Définition, lien avec avec injectivité, surjectivité, bijectivité.
- **Propriétés des cardinaux.** Inclusion, Intersection, Union finie, Différence, Complémentaire, produit cartésien
- **Dénombrement.** Notions d'ordre. Principe multiplicatif.
- **Cas classiques :**
  1. Nombre d'applications entre deux ensembles finis.
  2. Nombre de parties d'un ensemble fini.
  3. Nombre de p-arrangements d'un ensemble fini.
  4. Nombre de bijection entre deux ensembles finis de même cardinal.
  5. Nombre de permutations d'un ensemble fini.
  6. Nombre de parties à p éléments d'un ensemble fini.
  7. Formules du binôme et de Pascal.

Questions de cours

- La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. (+Démo)
- Définir le rang d'une application linéaire (28.38). Citer le master Théorème (28.41). Que se passe-t-il lorsque les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension ? (28.43) Citer le théorème du rang. (28.47)

  L'énoncé attendu du "master Théorème" est

  Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, F un espace vectoriel de dimension p et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

  1. *f est injective* $\iff$ $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ *est libre* $\iff$ $\mathrm{rg}(f) = n$
  2. *f est surjective* $\iff$ $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ *est génératrice de F* $\iff$ $\mathrm{rg}(f) = p$
  3. *f est bijective* $\iff$ $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ *est une base de F* $\iff$ $\mathrm{rg}(f) = p = n$

- Définir le noyau (28.18). Donner et démontrer la structure du noyau (28.19). Donner et démontrer le lien entre injectivité et noyau. (28.29)

- Définir et décrire les projecteurs. Étudier $f : (x, y) \mapsto (0, x + y)$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

  On attend : La définition générale d'une symétrie à l'aide des supplémentaires, un dessin, la caractérisation avec $p \circ p = p$ (sans preuve), les éléments caractéristiques exprimés comme des noyaux. Pour l'exemple, on veut la démonstration que c'est un projecteur et la recherche des éléments caractéristiques.
- Définir et décrire les symétries. Étudier $s : aX + b \mapsto bX + a$ définie sur $\mathbb{R}_1[X]$.

  On attend : Une définition générale à l'aide des supplémentaires, un dessin, la caractérisation avec $s \circ s = \mathrm{Id}$ (sans preuve), les éléments caractéristiques exprimés comme des noyaux. Pour l'exemple, on veut la démonstration que c'est une symétrie et la recherche des éléments caractéristiques.
- Donner (+ Démo) le nombre de bijections entre deux ensembles de même cardinal.
- Donner (+ Démo) le cardinal de $\mathcal{F}(E, F)$ lorsque E et F sont finis.
- Donner (+ Démo) le nombre de parties à p éléments d'un ensemble de cardinal n.