

Programme de colle n°28 : dénombrement, matrices, déterminants

30/5 → 2/6

Ensembles finis et dénombrement

- **Cardinaux des ensembles finis.** Définition, lien avec avec injectivité, surjectivité, bijectivité.
- **Propriétés des cardinaux.** Inclusion, Intersection, Union finie, Différence, Complémentaire, produit cartésien
- **Dénombrement.** Notions d'ordre. Principe multiplicatif.
- **Cas classiques :**
 1. Nombre d'applications entre deux ensembles finis.
 2. Nombre de parties d'un ensemble fini.
 3. Nombre de p -arrangements d'un ensemble fini.
 4. Nombre de bijection entre deux ensembles finis de même cardinal.
 5. Nombre de permutations d'un ensemble fini.
 6. Nombre de parties à p éléments d'un ensemble fini.
 7. Formules du binôme et de Pascal.

Matrices des applications linéaires en dimension finie

- Matrice d'une application linéaire dans une base en dimension finie. Image. Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Noyau et Image d'une matrice.
- **Structure.** Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.
- **Opérations :** Composition d'applications linéaires et matrices. Isomorphismes et matrices inverses.
- **Matrices de passage.** Changement de base. Propriétés des matrices de changement de base.
- Rang d'une matrice. Méthode de calcul par pivot. Rang d'une application linéaire. Théorème du rang pour les matrices. Rang de la transposée. Rang d'un système. Dimension des solutions d'un système homogène.
- Utilisation d'une matrice pour déterminer des bases de l'image et du noyau d'une application linéaire.

Calcul de déterminant

- Définition et propriétés du déterminant de matrices. Déterminant d'un produit.
- Opérations sur les lignes et les colonnes.
- Lien avec l'inversibilité. Déterminant d'une transposée.
- Calcul d'un déterminant en développant par rapport à une ligne ou une colonne.
- Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Propriétés.
- Déterminant d'un endomorphisme. Lien avec les bijections.

Questions de cours

- Donner (+ Démo) le nombre de bijections entre deux ensembles de même cardinal.
- Donner (+ Démo) le cardinal de $\mathcal{F}(E, F)$ lorsque E et F sont finis.
- Donner (+ Démo) le nombre de parties à p éléments d'un ensemble de cardinal n .
- Déterminer la matrice de $\varphi_7 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans les bases canoniques des espaces concernés. On détaillera le calcul et méthode de construction de la matrice calculée précédemment. Détailler ensuite le calcul de $\varphi_7(1, -1, 3)$ **en utilisant la matrice**.

$$(x; y; z) \mapsto \begin{pmatrix} x+y & z \\ z-y & x+y-z \end{pmatrix}$$
- Définir la matrice de passage d'une base à une autre.
Donner la matrice de passage de $\mathcal{B} = (1, 1+X, 1+X+X^2)$ à $\mathcal{B}' = (3+2X+X^2, X^2, -6-5X-3X)$.
Expliquer comment on effectue un changement de base pour une matrice d'application linéaire. (II.3)
On définira bien tous les objets présents.

- Calculer $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$.

- Lien entre le déterminant et l'inversibilité d'une matrice. Démonstration.