Dynamique polynomiale et théorie du potentiel

Axel Rogue encadré par Christophe Dupont

Printemps 2014, IRMAR

Table des matières

1 Introduction et objectif

L'objectif de ce texte est de présenter une introduction à la dynamique complexe, soit l'étude d'un polynôme complexe par le comportement asymptotique de ses itérés, et des outils utilisés pour cela. La source d'inspiration principale de l'auteur est l'excellent livre de Thomas Ransford [2], dont sont tirés la majeure partie des idées et résultats. On pourra aussi trouver un autre point de vue plus centré sur le coté fractal des objets dans le livre de Kenneth Falconer [1].

On considère $q : z \mapsto \sum_{j=0}^{d} a_j z^j \in \mathbb{C}[X]$. Dans la suite, q^n notera l'itéré n-ième de q. Dans ce cadre dynamique, les polynômes de degré 0 ou 1 sont inintéressants et nous supposerons donc dans toute la suite que $d := deg(q) \geq 2$.

Plus précisément, la question qui nous occupera est : Etant donné un point $z \in \mathbb{C}$, que devient la suite des $q^n(z)$ quand $n \in \mathbb{Z}$?

Définition 1.1 *Le bassin d'attraction de l'infini est*

$$F_\infty := \{z \in \mathbb{C} | \lim_{n \to +\infty} |q^n(z)| = +\infty\}.$$

Cet ensemble a quelques propriétés simples : ∞ est un point attractif pour q. C'est à dire qu'il existe un disque fermé $\overline{D}(0,r)$ tel que $U = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus D(0,r)$ vérifie $q(U) \subset U$. On en déduit que $F_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} q^{-n}(U)$. D'où

Propriétés 1.2
- *F_∞ est un voisinage de l'infini.*
- *F_∞ est un ouvert connexe.*
- *$q^{-1}(F_\infty) = F_\infty$ et $q(F_\infty) = F_\infty$.*

Définition 1.3 *L'ensemble de Julia associé à q est $J = \partial F_\infty$.*

C'est cet ensemble qui va avoir le comportement le plus intéressant et que nous allons étudier plus en détail

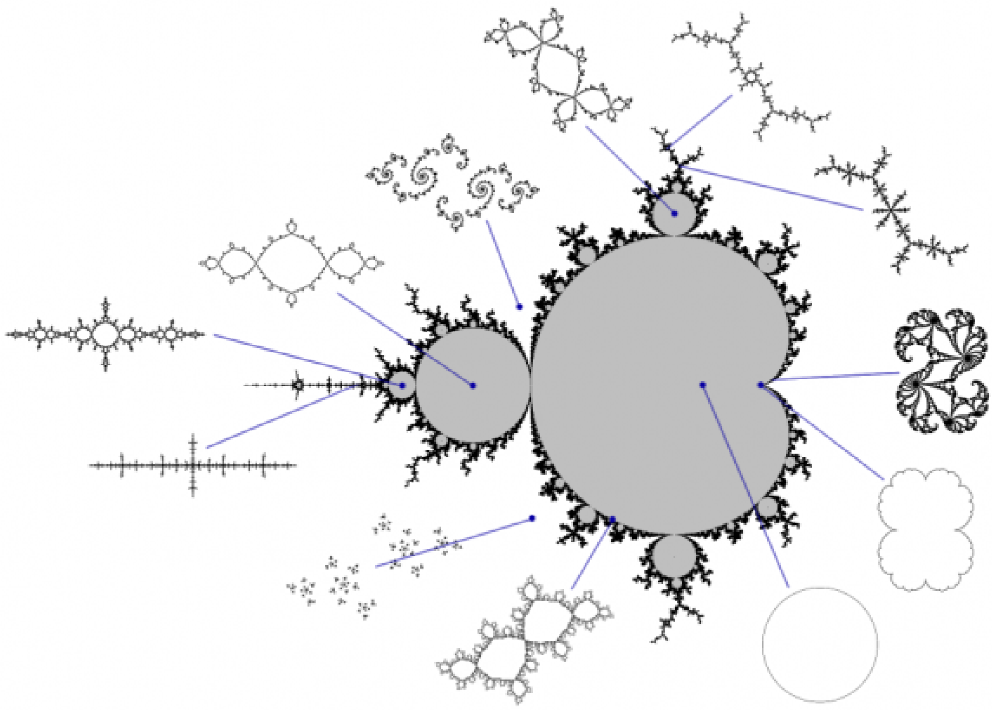
Propriétés 1.4
- *J est un compact.*
- *$q^{-1}(J) = J$ et $q(J) = J$.*
- *J est non-vide pour tout q.*

La dernière affirmation vient du fait que q a toujours au moins un point fixe. Ainsi, F_∞ est un ouvert $\neq \mathbb{C}$ et J est non-vide.

Exemples 1.5
- *Pour $q : z \mapsto z^2$, $J = Cercle(0,1)$.*
- *Pour $q : z \mapsto z^2 - 2$, $J = [-2;2]$.*
- *Pour $q : z \mapsto z^2 - 1$, J devient plus compliqué, il s'agit d'un connexe à caractère fractal.*

– *Pour* $q : z \mapsto z^2+c$ *avec* $|c| > 2$*,* J *ressemble à un Cantor, et est donc non-connexe.*

En fait, la question de la connexité du Julia associé à $z \mapsto z^2 + c$ en fonction de c a elle aussi donné lieu à de nombreux développements. $M := \{c \in \mathbb{C} | J_{z \mapsto z^2+c} \text{ connexe}\}$ est le célèbre ensemble de Mandelbrot, qui apparait ici avec les ensembles de Julia de $z \mapsto z^2 + c$ pour diverses valeurs de c :



Ce qu'il est important de remarquer, c'est la diversité des formes prises par les Julia. Pourtant, il nous est possible d'énoncer un résultat général :

Théorème 1.6 *Soit* $w \in J$*. Alors* $J = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} q^{-n}(\{w\})}$*.*

Pour se faire une idée du phénomène, on peut revenir à l'exemple $q(z) = z^2$ où J est le cercle unité. Dans ce cas, le théorème annonce que l'ensemble des racines 2^k-èmes de l'unité a pour adhérence le cercle, ce que nous savions déjà. Cependant, le résultat reste vrai pour tout Julia, même lorsqu'il prend des formes exotiques comme un Cantor ou un connexe fractal.

Ce résultat apporte aussi une forme d'uniformité de J : Tous les points sont "de même nature", puisqu'à partir de chacun on peut reformer J à l'aide de ses antécédents par q.

Remarque 1.7 *Il est nécessaire de prendre l'adhérence des antécédents. En effet, la propriété 5.3 combinée à la remarque 4.10 montrent qu'un ensemble de Julia ne peut pas être dénombrable.*

Le résultat qui sera l'objectif de ce texte est en fait un résultat plus fort, sur la convergence de mesures.

Notations 1.8

$\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des mesures de probabilités sur E.

δ_x note la mesure de Dirac en x.

Théorème 1.9 *Soit $w \in J$.*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\xi_1, \ldots, \xi_{d^n}$ les racines de $q^n(z) - w$, répétées selon leur multiplicité et on pose

$$\mu_n = \frac{1}{d^n} \sum_{i=1}^{d^n} \delta_{\xi_i}, \qquad \mu_n \in \mathcal{P}(J).$$

Alors il existe $\nu \in \mathcal{P}(J)$ telle que $Supp(\nu) = J$ et (μ_n) converge vers ν au sens de la topologie faible.*

On vérifie facilement que ce théorème implique le théorème 1.6. Le fait que le support de ν soit égal à J est crucial (5.5) pour cette vérification.

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin de deux outils. Le premier est un théorème d'analyse fonctionnelle :

Théorème 1.10 *Le convexe $\mathcal{P}(K)$ est séquentiellement compact pour la topologie faible* si K est compact.*

Preuve : Il s'agit d'appliquer le théorème de représentation de Riesz à une forme linéaire bien choisie.

Si K est un espace métrique compact, alors $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ est séparable. On prend donc un ensemble dense dénombrable de fonctions continues notées $\phi_1, \phi_2, \ldots$. Par compacité de K, la suite $(\int \phi_1 d\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc on peut en extraire une sous-suite convergente. Notons N_1 l'ensemble des indices de la suite extraite. De même, la suite $(\int \phi_2 d\mu_n)_{n \in N_1}$ est bornée, donc on peut en extraire une sous-suite convergente dont les indices forment un ensemble $N_2 \subset N_1$. En procédant ainsi par extraction successives, on construit des ensembles $N_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset \ldots$ tels que pour tout $j \in \mathbb{N}$, la suite $(\int \phi_j d\mu_n)_{n \in N_j}$ soit convergente.

Pour $j \in \mathbb{N}^*$, on note $n_j = min(N_j)$. Alors $n_1 < n_2 < \ldots$ et pour tout ϕ_j, la suite $(\int \phi_j d\mu_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente. Donc $(\int \phi d\mu_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge pour toute fonction continue ϕ par densité de $\{\phi_n\}$.

On peut alors écrire la forme linéaire que l'on cherchait :

$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(K, \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ \phi & \mapsto & \lim_{k \to +\infty} \left(\int_K \phi \; d\mu_{n_k} \right). \end{array}$$

C'est une forme linéaire positive à laquelle on applique le théorème de représentation de Riesz-Markov. Il existe donc une mesure de Borel μ sur K telle que $\Delta(\phi) = \int_K \phi \; d\mu$.

$\mu(K) = \Delta(1) = lim(\int d\mu_{n_k}) = 1$ donc $\mu \in \mathcal{P}(K)$. $\square$

Le deuxième outil dont nous allons nous servir, notamment pour construire la mesure ν, est la théorie du potentiel. Le point est de vue de cette théorie est d'étudier les mesures par le biais de certaines fonctions (les potentiels) qui leur sont associés plutôt que directement. Nous allons commencer par des résultats sur les fonctions harmoniques et sous-harmoniques, puis nous aborderons les potentiels.

2 Rappels sur les fonctions harmoniques

On ébauchera ici la théorie des fonctions harmoniques, sans preuves, afin de rappeler quelques notions utiles.

2.1 Introduction

Le Laplacien Δ est un opérateur sur les fonctions de $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ avec U un ouvert de $\mathbb{C}$:

$\Delta : f \mapsto f_{xx} + f_{yy}$.

Définition 2.1 *Soit $h : U \to \mathbb{R}$, U ouvert de $\mathbb{C}$. h est dite harmonique si $h \in \mathcal{C}^2(U)$ et $\Delta h = 0$ sur U.*

Proposition 2.2 *Si f est holomorphe sur un domaine D alors $Re(f)$ est harmonique sur D.*

Réciproquement, pour toute fonction h harmonique sur D simplement connexe, il existe f holomorphe sur D telle que $h = Re(f)$. (f est unique à constante près)

Propriété 2.3 (Propriété de la moyenne) *Soit h harmonique sur un voisinage d'un disque fermé $D(w,\rho)$. Alors*

$$h(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(w+\rho e^{i\theta})d\theta.$$

Propriété 2.4 (Principe d'identité) *Si h et k sont deux fonctions harmoniques sur un domaine D et $h = k$ sur un ouvert U non vide, alors $h = k$ sur tout D.*

Propriété 2.5 (Principe du maximum) *Soit h harmonique sur D. Alors :*
- *Si h a un minimum local, h est constante*
- *Si h s'étend continument à $\overline{D}$ et $h \leq 0$ sur ∂D, alors $h \leq 0$ sur D.*

2.2 Problème de Dirichlet sur le disque

Le problème de Dirichlet consiste à se fixer un domaine D ainsi qu'une fonction continue $\Phi : \partial D \to \mathbb{R}$ et à trouver h harmonique sur D telle que $\forall z \in \partial D, \quad lim_{\zeta\to z} h(\zeta) = \Phi(z)$. C'est un problème compliqué, néanmoins abordable dans le cas où D est un disque.

Définition 2.6 *Le noyau de Poisson est la fonction* $P : \begin{array}{ccc} D(0,1) \times \partial D(0,1) & \to & \mathbb{R} \\ z, \zeta & \mapsto & Re\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right) \end{array}.$

Pour $\Delta = \Delta(w, \rho)$ *et* $\Phi : \partial\Delta \to \mathbb{R}$ *intégrable. Alors on note*

$$P_{\Delta,\Phi}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P\left(\frac{z-w}{\rho}, e^{i\theta}\right) \Phi(w + \rho e^{i\theta}) d\theta.$$

Théorème 2.7 $P_{\Delta,\Phi}$ *est harmonique sur* Δ*, et si* Φ *est continue, c'est l'unique solution du problème de Dirichlet associé sur* Δ*.*

Cette solution du problème de Dirichlet mène (entre autres) à deux résultats intéressants :

Propriété 2.8 (Réciproque de la propriété de la moyenne) *Si* $h : U \to \mathbb{R}$ *est continue et*

$$\forall w \in U, \quad \exists \rho > 0, \quad \forall r < \rho, \quad h(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(w + re^{it}) dt.$$

Alors h *est harmonique.*

Proposition 2.9 *Soit* (h_n) *une suite de fonctions harmoniques sur un domaine* D *qui converge localement uniformément vers une fonction* h*. Alors* h *est harmonique.*

3 Fonctions sous-harmoniques

Nous allons définir la classe des fonctions sous-harmoniques et donner quelques outils pour leur étude. Les fonctions sous-harmoniques sont l'équivalent complexe des fonctions convexes dans $\mathbb{R}$. qu'une fonction sous harmonique en une variable est d'ailleurs une fonction convexe. Intuitivement, une fonction sous-harmonique pourrait être définie comme ayant un laplacien positif. Cependant, cela nous limiterait au cadre des fonctions $\mathcal{C}^2$, ce qui est trop restrictif. Nous utiliserons donc une définition plus large qui coïncide avec un laplacien positif quand cela a un sens.

3.1 Premières définitions

Définition 3.1 *Soit* $u : U \to [-\infty, +\infty[$ *semi-continue supérieure, avec* U *un ouvert de* $\mathbb{C}$*. Elle est dite sous-harmonique si elle vérifie l'inégalité locale de la sous-moyenne :*

$$\forall w \in U, \quad \exists \rho > 0, \quad \forall 0 \leq r < \rho, \quad u(w) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(w + re^{it}) dt.$$

L'interprétation géométrique de cela est qu'en chaque point, u est inférieure à sa moyenne sur tout cercle suffisamment petit centré en ce point. Il s'agit clairement d'une propriété locale.

Remarque 3.2 *On dit que u est sur-harmonique si $-u$ est sous-harmonique. Ainsi pour u une fonction $\mathcal{C}^2$, elle est harmonique si et seulement si elle est à la fois sur-harmonique et sous-harmonique.*

Le premier exemple de fonction sous-harmonique est tout simplement $z \mapsto z$. Plus intéressant, $z \mapsto \log(|z|)$ est également sous-harmonique (elle est même harmonique sur $\mathbb{C}^*$), et on peut généraliser en :

Théorème 3.3 *Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$, alors $\log(|f|)$ est sous-harmonique sur U.*

Preuve : Aux points w où $\log|f(w)| = -\infty$, $log|f|$ est bien sous-harmonique. Aux autres points, $\log|f|$ est en fait harmonique en tant que partie réelle (localement) d'une détermination de $\log(f)$. Elle vérifie donc l'égalité de la moyenne et est sous-harmonique. □

Enfin, il est intéressant de remarquer que la classe des fonctions sous-harmoniques est stable par maximum et combinaisons linéaires.

3.2 Principe du maximum

Comme pour les fonctions holomorphes ou les fonctions harmoniques (voir 2.5), l'un des outils les plus puissant est le théorème du maximum :

Théorème 3.4 (Principe du maximum) *Soit u une fonction sous-harmonique sur un domaine D, alors :*

- *Si u atteint un maximum global sur D, alors u est constante.*
- *Si $\forall \xi \in \partial D, \quad \limsup_{z\to\xi} u(z) \leq 0$ alors $u \leq 0$ sur D.*

Preuve : Premier point : On note M le maximum global atteint par u. On note $A = \{u(z) < M\}$ et $B = \{u(z) = M\}$. A est ouvert car u est semi-continue supérieure. B est ouvert par l'inégalité de la sous-moyenne. En effet, sur des petits cercles autour d'un point de B, cette inégalité force u à valoir M sur ces cercles. Comme D est connexe et B est non-vide, on en déduit que A est vide, et donc u est constante.

Deuxième point : On étend u à ∂D en posant $u(\xi) = \limsup_{z\to\xi} u(z)$ pour $\xi \in \partial D$. Comme $\overline{D}$ est compact, u y atteint son maximum. Si ce maximum est atteint sur ∂D, alors $u \leq 0$ par hypothèse. Si le maximum est atteint sur D, il suffit d'appliquer le premier point. □

En fait, on peut donner une version un peu plus forte du deuxième point en s'intéressant à ce qu'il se passe en ∞ : On peut simplement demander que u ne croisse pas trop vite en l'infini.

Proposition 3.5 (Principe de Phragmén-Lindelöf) *Soit u sous-harmonique sur un domaine D non-borné. Si :*

- $\forall \xi \in \partial D_{\setminus\{\infty\}}, \quad \limsup_{z\to\xi} u(z) \leq 0.$

– *il existe une fonction sur-harmonique v ne prenant pas $+\infty$ pour valeur telle que :*

$$\liminf_{z\to\infty} v(z) > 0 \ \textit{et} \ \limsup_{z\to\infty} \frac{u(z)}{v(z)} \leq 0.$$

Alors $u \leq 0$ sur D.

Preuve : -On commence par traiter le cas $v > 0$ sur tout D. On va approcher u par des fonctions vérifiant le principe du maximum. Pour tout $\epsilon > 0$, on pose $u_\epsilon = u - \epsilon v$. u_ϵ est la somme de deux fonctions sous-harmoniques donc est également sous-harmonique sur D. On a bien sûr que pour $\xi \in \partial D_{\setminus\{\infty\}}$, $\limsup_{z\to\xi} u_\epsilon(z) \leq 0$, mais également que $\limsup_{z\to\infty} u_\epsilon(z) \leq 0$. On peut donc appliquer le théorème du maximum et on obtient $u_\epsilon \leq 0$ sur D. En faisant tendre ϵ vers 0, on en déduit $u \leq 0$ sur D.

-Dans le cas général, il va falloir jouer plus finement avec des bornes inférieures de v. Pour $\epsilon > 0$, on s'intéresse à l'ensemble $F_\epsilon = \{z \in D | u(z) \geq \epsilon\}$. Par semi-continuité inférieure de v, on déduit de $\liminf_{z\to\infty} v(z) > 0$ que v admet un minimum global sur F_ϵ. On peut alors supposer (quitte à ajouter une constante à v) que $v \geq 0$ sur F_ϵ. Si l'on s'intéresse à l'ensemble $V = \{z \in D | v(z) \geq 0\}$, le bord de ses composantes connexes est contenu dans $\partial D \cup (D \cap \partial V)$. Or :

– $\limsup_{z\to\xi}(u(z) - \epsilon) \leq \limsup_{z\to\xi} u(z)$ pour $\xi \in \partial D_{\setminus\infty}$.

– $\limsup_{z\to\xi}(u(z) - \epsilon) \leq u(\xi) - \epsilon$ pour $\xi \in D \cap \partial V$.

Et donc $\limsup_{z\to\xi}(u(z) - \epsilon) \leq 0$ pour ξ parcourant le bord de toutes les composantes connexes de V. On peut donc y appliquer le cas particulier précédent du principe de Phragmén-Lindelöf : $u - \epsilon \leq 0$ sur V. $F_\epsilon \subset V$ donc $u \leq \epsilon$ sur F_ϵ. Et comme, par définition de F_ϵ, $u \leq \epsilon$ sur $D_{\setminus F_\epsilon}$, $u \leq \epsilon$ sur D tout entier. Le principe est alors démontré en faisant tendre ϵ vers 0. $\square$

Ce principe est très utile pour comprendre le comportement asymptotique des fonctions sous-harmoniques. On peut notamment en tirer des conditions de "croissance minimale", avec un résultat analogue au théorème de Liouville pour les fonctions holomorphes :

Corollaire 3.6 *Si u est sous-harmonique sur $\mathbb{C}$ telle que $\limsup_{z\to\infty} \frac{u(z)}{\log|z|} \leq 0$, alors u est constante sur $\mathbb{C}$ entier.*

En particulier, toute fonction sous-harmonique sur $\mathbb{C}$ et majorée globalement est constante.

Preuve : On suppose qu'on est pas dans le cas $u \equiv -\infty$. Soit $w \in \mathbb{C}$ tel que $u(w) \neq -\infty$. En appliquant 3.5 à $u - u(w)$ et $v(z) = \log|z - w|$ sur $\mathbb{C}_{\setminus\{w\}}$, on obtient $u \leq u(w)$ sur $\mathbb{C}$ et par 3.4, u est constante. $\square$

Le corollaire suivant donne une idée des résultats étonnants que l'on peut obtenir grâce à ce principe, ici utilisé pour donner la croissance minimale d'une fonction sous-harmonique sur une bande verticale.

Corollaire 3.7 *On pose* $S_\gamma = \{z \in \mathbb{C} | \, |Rez| < \frac{\pi}{2\gamma}\}$ *pour* $\gamma > 0$.

Soit u *sous-harmonique sur* S_γ *telle que* $\forall \xi \in \partial S_{\gamma \backslash \{\infty\}}, \quad \limsup_{z \to \xi} u(z) \leq 0$ *et vérifiant de plus la majoration*

$$\exists A < \infty, \alpha < \gamma, \quad \forall x + iy \in S_\gamma, \quad u(x+iy) \leq Ae^{\alpha|y|}.$$

Alors $u \leq 0$ *sur* S_γ

Preuve : On prend $\beta \in]\alpha, \gamma[$ et on définit $v(z) = Re(cos(\beta z)) = cos(\beta x)cosh(\beta y)$. v est harmonique sur S_γ et on peut vérifier qu'elle vérifie les hypothèses de 3.5.□

3.3 Critères de sous-harmonicité

Théorème 3.8 *Soit* u *semi-continue supérieure sur un ouvert* U *de* $\mathbb{C}$. *Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. u *est sous-harmonique sur* U.
2. $\forall \overline{\Delta}(w, \rho) \subset U, \quad \forall r < \rho, \quad \forall 0 \leq t < 2\pi$.
$$u(w + re^{it}) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r cos(\theta - t) + r^2} u(w + \rho e^{i\theta} d\theta.$$
3. *Si* $D \subset U$ *est relativement compact,* h *est une fonction harmonique sur* D *et* $\forall \xi \in \partial D, \quad \limsup_{z \to \xi}(u - h)(z) \leq 0$, *alors* $u \leq h$ *sur* D.

Preuve : $2 \Rightarrow 1$ est immédiat car la définition de sous-harmonique est en fait un cas particulier de l'inégalité présentée ici.

$1 \Rightarrow 3$ est le principe du maximum (3.4) appliqué à $u - h$.

Le nom "sous-harmonique" prend ici tout son sens : u est sous-harmonique si elle se trouve sous toutes les fonctions harmoniques dès qu'elle est dessous sur un contour.

$3 \Rightarrow 2$ Soit $D = \overline{D}(w, \rho) \subset U$. u est semi-continue supérieure et majorée, donc on peut l'approcher sur ∂D par une suite de fonctions continues $\phi_n : \partial D \to \mathbb{R}$, vérifiant $\phi_1 \geq \phi_2 \geq \phi_3 \geq \ldots$. Par 2.7, les P_{D,ϕ_n} sont des fonctions harmoniques sur D et $\lim_{z \to \xi} P_{D,\phi_n}(z) = \phi_n(\xi)$ pour $\xi \in \partial D$.

Ainsi, $\limsup_{z \to \xi}(u - P_{D,\Phi_n})(z) \leq 0$ pour tout ξ dans ∂D. On utilise notre hypothèse pour en déduire que $u \leq P_{D,\Phi_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les P_{D,Φ_n} vérifient toutes l'inégalité demandée, et le théorème de convergence monotone nous permet de l'obtenir pour u également en faisant tendre n vers $+\infty$. □

Le résultat suivant, similaire au théorème de convergence dominée, est celui qui va nous permettre d'utiliser des arguments de sous-harmonicité en théorie du potentiel : C'est l'argument dans la propriété 4.2 pour montrer qu'ils sont sous-harmoniques.

Théorème 3.9 *Soit* (Ω, μ) *un espace mesuré avec* $\mu(\Omega) < \infty$, U *un ouvert de* $\mathbb{C}$. *Si* $v : U \times \Omega \to [-\infty, +\infty)$ *est une fonction vérifiant :*

– *v est mesurable sur $U \times \Omega$.*
– *$z \mapsto v(z,w)$ est sous-harmonique sur U pour tout w dans Ω.*
– *$z \mapsto \sup_{w\in\Omega} v(z,w)$ est localement majorée sur U.*

Alors $u(z) := \int_\Omega v(z,w)d\mu(w)$ est sous-harmonique sur U.

Preuve : Soit D un domaine relativement compact de U. Combiné avec la troisième hypothèse sur v, on en déduit que $sup_{win\Omega} v(z,w)$ est bornée globalement sur D. Quitte à lui soustraire une constante, on peut donc supposer sans restrictions que $v \leq 0$ sur $D \times \Omega$.

Si l'on considère une suite $z_n \to z$, le lemme de Fatou nous dit que :

$$\limsup_{n\to+\infty} u(z_n) \leq \int_\Omega \limsup v(z_n,w)d\mu(w) \leq \int_\Omega v(z,w)d\mu(w) = u(z).$$

Donc u est semi-continue supérieure sur D.

Pour un disque $\overline{D}(z,\rho) \subset D$, le théorème de Fubini implique

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z+\rho e^{i\theta})d\theta &= \int_\Omega \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z+\rho e^{i\theta},w)d\theta\right) d\mu(w) \\ &\geq \int_\Omega v(z,w)d\mu(w) \\ &\geq u(z).\end{aligned}$$

Ainsi u vérifie l'inégalité de la sous-moyenne sur D, et le résultat s'étend à U tout entier. □

4 Théorie du potentiel

4.1 Définition et comportement

Définition 4.1 *Soit $\mu \in \mathcal{P}(K)$, K compact de $\mathbb{C}$. Son potentiel est*

$$p_\mu : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & [-\infty,+\infty[\\ z & \mapsto & \int_{w\in K} \log|z-w|\, d\mu(w) \end{array}.$$

Le nom potentiel n'est pas choisi au hasard, mais vient d'une analogie avec la physique : Si l'on considère une distribution de charge μ sur K, son potentiel électrostatique sera p_μ. Il est important de remarquer que le potentiel peut être à valeur $-\infty$. Il suffit pour cela qu'un des singleton de K soit de mesure non-nulle.

Nous pouvons facilement obtenir quelques résultats sur le comportement des potentiels

Propriété 4.2

1. *p_μ est sous-harmonique sur $\mathbb{C}$.*

2. p_μ *est harmonique sur* $\mathbb{C} \setminus K$.
3. $p_\mu(z) = \log|z| + O\left(\frac{1}{|z|}\right)$ *quand* $|z| \to +\infty$.
4. *Si* $\xi_0 \in K$*, alors* $\liminf_{z\to\xi_0} p_\mu(z) = \liminf_{(\xi\to\xi_0,\ \xi\in K)} p_\mu(\xi)$.
5. *Si* $\xi_0 \in K$ *et* $\lim_{(\xi\to\xi_0,\ \xi\in K)} p_\mu(\xi) = p_\mu(\xi_0)$*, alors* $lim_{z\to\xi_0} p_\mu(\xi) = p_\mu(\xi_0)$.
6. ***Principe du minimum :*** *Si* $p_\mu \geq M$ *sur* K*, alors* $p_\mu \geq M$ *sur tout* $\mathbb{C}$.

Preuve :

1) et **2)** On applique le théorème 3.9 avec $v(z,w) = \log|z-w|$ sur $\mathbb{C} \times K$, et on obtient p_μ sous-harmonique sur $\mathbb{C}$. De même, p_μ est sur-harmonique sur $\mathbb{C} \setminus K$.

3) $p_\mu(z) = \mu(\mathbb{C})\log|z| + \int \log|1 - \frac{w}{z}|\, d\mu(w)$.

4) Le résultat est immédiat dans le cas $p_\mu(\xi_0) = -\infty$, donc on suppose $p_\mu(\xi_0) > -\infty$, ce qui implique $\mu(\{\xi_0\}) = 0$. Soit $\epsilon > 0$, alors $\exists r > 0$ tel que $\mu(D(\xi_0, r)) < \epsilon$. Soit $z \in \mathbb{C}$, on prend $\xi \in K$ qui minimise $|\xi - z|$. Alors

$$\frac{|\xi - w|}{|z - w|} \leq \frac{|\xi - z| + |z - w|}{|z - w|} \leq 2.$$

$$p_\mu(z) = p_\mu(\xi) - \int_K \log\left|\frac{\xi - w}{z - w}\right| d\mu(w).$$

$$p_\mu(z) \geq p_\mu(\xi) - \epsilon\ \log(2) - \int_{K\setminus D(\xi_0,r)} \log\left|\frac{\xi - w}{z - w}\right| d\mu(w).$$

Quand $z \to \xi_0$ dans $\mathbb{C}$, $\xi \to \xi_0$ dans K et

$$\liminf_{z\to\xi_0} p_\mu(z) \geq \liminf_{\xi\to\xi_0,\xi\in K} p_\mu(z) - \epsilon\ \log(2).$$

Ce qui donne le résultat quand ϵ tend vers 0.

5) Si p_μ vérifie l'hypothèse :

Par le point 4), $\liminf_{z\to\xi_0} p_\mu(z) = p_\mu(\xi_0)$.

Comme p_μ est semi-continue, $\limsup_{z\to\xi_0} p_\mu(z) \leq p_\mu(\xi_0)$, d'où le résultat.

6) On prend $u = -p_\mu$ sur $\mathbb{C}\setminus K$. Donc u est sous-harmonique sur $\mathbb{C}\setminus K$ et $u(z) \to -\infty$ quand $|z| \to \infty$. Les deux propriétés précédentes impliquent que pour $\xi_0 \in \partial K$, on a :

$$\begin{aligned}\limsup_{z\to\xi_0, z\notin K} &\leq -\liminf_{z\to\xi_0} p_\mu(z) \\ &\leq -\liminf_{\xi\to\xi_0,\xi\in K} p_\mu(\xi) \\ - &\leq M\end{aligned}$$

Le principe du maximum appliqué à toutes les composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus K$ nous donne que $u \leq -M$ et donc $p_\mu \geq M$ sur $\mathbb{C}$. $\square$

La propriété suivante permet de bien saisir la dualité entre mesures et potentiels, mais sera admise. Sa preuve demande d'introduire le laplacien généralisé, c'est dire défini au sens des distributions, et nous préférons passer sous silence cette complication.

Propriété 4.3 *Pour μ et $\mu' \in \mathcal{P}(K)$. Alors $p_\mu = p_{\mu'}$ implique $\mu = \mu'$.*

A l'aide de ces potentiels, on va pouvoir définir une quantité permettant de comparer les mesures du point de vue de leur "bonne répartition".

Définition 4.4 *L'énergie associée à $\mu \in \mathcal{P}(K)$ est*

$$I(\mu) = \int_K p_\mu d\mu = \int_K \int_K \log|z - w|\, d\mu(z) d\mu(w) \quad \in [-\infty, +\infty[\,.$$

Là aussi, il s'agit d'une analogie avec l'énergie électrostatique. A ce détail près que les charges de même signe se repoussent, il faut donc inverser le signe pour retrouver l'intuition physique de l'énergie. L'énergie permet d'isoler certaines mesures particulières : Les mesures d'équilibre, qui sont les "mieux réparties" sur K. Ce sont justement celles qui nous intéressent pour obtenir la mesure ν dans 1.9.

Définition 4.5 *Une mesure d'équilibre pour un compact K est une $\nu \in \mathcal{P}(K)$ telle que :*

$$I(\nu) = \sup_{\mu \in \mathcal{P}(K)} I(\mu).$$

Pour rester dans l'interprétation électrostatique, une mesure d'équilibre correspondrait à une distribution de charge minimisant l'énergie, et donc une distribution stable. Si l'on jette des charges sur un compact, elles s'agenceront naturellement selon une mesure d'équilibre qui représente un puits de stabilité.

L'intérêt de cette notion est assuré par le résultat suivant : (qui prouve la partie existence de notre théorème)

Théorème 4.6 *Pour tout compact K, il existe une mesure d'équilibre sur K.*

Preuve : Soit $M = \sup_{\mu \in \mathcal{P}(K)} I(\mu)$. Soit (μ_n) une suite de mesures réalisant cette borne supérieure. Par 1.10, il y a une sous-séquence (μ_{n_k}) qui converge faible* vers $\nu \in \mathcal{P}(K)$. Le lemme qui suit nous assure que $I(\nu) \geq M$, et donc ν est une mesure d'équilibre pour K. $\square$

Lemme 4.7 *Si μ_n converge faible* vers μ dans $\mathcal{P}(K)$, alors $\limsup_{n\to+\infty} I(\mu_n) \leq I(\mu)$.*

Preuve du lemme : On pose $\chi(z, w) = \max(\log|z - w|, -m)$ définie sur $K \times K$ pour tout $m \geq 1$.

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to+\infty} I(\mu_n) &= \limsup_{n\to+\infty} \int_K \int_K \log|z - w| \ d\mu_n(z)\ d\mu_n(w). \\
&\leq \limsup_{n\to+\infty} \int_K \int_K \chi(z, w)\ d\mu_n(z)\ d\mu_n(w).
\end{aligned}$$

Par le théorème de Stone-Weierstrass, on peut approcher uniformément $\chi(z,w)$ par $\sum_{finie} \phi_j(z)\psi_j(w)$ avec les ϕ_j et les ψ_j continues. Alors la convergence faible* nous donne que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_K \int_K \chi(z,w)\ d\mu_n(z)\ d\mu_n(w)\ = \int_K \int_K \chi(z,w)\ d\mu(z)\ d\mu(w).$$

Et donc :

$$\limsup_{n\to+\infty} I(\mu_n) \leq \int_K \int_K \chi(z,w)\ d\mu(z)\ d\mu(w).$$

En faisant tendre m vers $+\infty$, on a :

$$\limsup_{n\to+\infty} I(\mu_n) \leq I(\mu) \qquad .\square$$

4.2 Ensembles polaires et théorème de Frostman

Le théorème de Frostman est un puissant résultat reliant énergie et potentiel. Cependant, il nécessite l'introduction de la notion d'ensembles polaires, que l'on peut concevoir comme les "ensembles négligeables" de la théorie du potentiel.

Définition 4.8 *On dit que $E \in \mathbb{C}$ est polaire si pour tout compact K de E et pour toute mesure $\mu \in P(K)$ on a $I(\mu) = -infini$*

Proposition 4.9 *Soit $\mu \in \mathcal{P}(K)$ telle que $I(\mu) > -\infty$. Alors pour tout ensemble polaire E, $\mu(E) = 0$.*

Cela nous assure que la notion d'ensemble polaire est la bonne. Ils s'agit bien des ensembles que ne distinguent pas les mesures "non-dégénérées énergétiquement".

Remarque 4.10 *Tout ensemble dénombrable est polaire. En effet, une mesure de probabilité μ sur un ensemble dénombrable associe forcément à au moins un singleton $\{x\}$ une mesure strictement positive. En de tels points, $p_\mu(x) = -\infty$ et donc $I(\mu) = -\infty$.*

Preuve : Procédons par contraposée : On suppose que $\mu(E) > 0$. Montrons que E non-polaire. Il existe un compact $K \subset E$ tel que $\mu(K) > 0$. On pose $\mu' = \mu|_K$ et $d = diam(Supp(\mu))$. Alors

$$\begin{aligned} I(\mu') &= \int_K \int_K \log\left|\frac{z-w}{d}\right| dmu(z) d\mu(w) + \mu(K)^2 \log(d). \\ &\geq \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} \left|\frac{z-w}{d}\right| dmu(z) d\mu(w) + \mu(K)^2 \log(d). \\ &\geq I(\mu) - \mu(\mathbb{C})^2 \log(d) + \mu(K)^2 \log d. \\ &> -\infty. \end{aligned}$$

Donc E n'est pas polaire. $\square$

En prenant une restriction de la mesure de Lebesgue sur un compact, on en déduit :

Corollaire 4.11 *Les ensembles polaires sont de mesure de Lebesgue nulle.*

On récupère aussi un résultat utile

Corollaire 4.12 *Une union dénombrable d'ensembles polaires est polaire.*

Preuve : Si les E_n sont des ensembles polaires, on pose $E = \cup E_n$. Soit μ à support compact $K \in E$ telle que $I(\mu) > -\infty$. Par union dénombrable, on a $\mu(E) = 0$ et donc μ est identiquement nulle. □

Théorème 4.13 (de Frostman) *Soit K compact et ν une mesure d'équilibre pour K. Alors*

1. $p_\nu \geq I(\nu)$ *sur* $\mathbb{C}$.
2. $p_\nu = I(\nu)$ *sur* $K \setminus E$ *avec* E *un ensemble polaire.*

Preuve : Si $I(\nu) = -\infty$, le résultat est immédiat. On suppose donc qu'on est dans le cas $I(\nu) \neq -\infty$.

On s'intéresse à deux familles d'ensembles, définis pour tout $n \in \mathbb{N}*$

$$L_n := \{z \in Supp(\nu) \mid p_\nu(z) < I(\nu) - \frac{1}{n}\}.$$

$$K_n := \{z \in K \mid p_\nu(z) \geq I(\nu) + \frac{1}{n}\}.$$

Etape 1 : montrons par l'absurde que tous **les K_n sont polaires**. Supposons qu'il existe n tel que K_n ne soit pas polaire. Alors il existe $\mu \in \mathcal{P}(K_n)$ telle que $I(\mu) > -\infty$.

Par ailleurs, on sait que $I(\nu) = \int p_\nu$. p_ν étant une mesure de probabilité, elle ne peut pas être supérieure à $I(\nu) + \epsilon$ sur tout son support. Donc il existe $\Delta = \overline{D}(z_0, r)$ sur lequel $p_\nu < I(\nu) + \frac{1}{2n}$.

On pose $a = \nu(\Delta)$ et on définit $\sigma = \begin{cases} \mu \text{ sur } K_n \\ \frac{-\nu}{a} \text{ sur } \Delta \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ qui est une mesure signée. On s'intéresse à $\nu_t = \nu + t\sigma$ avec t assez petit pour que ν_t soit positive et donc une mesure de proba.

$$\begin{aligned} I(\nu_t) - I(\nu) &= 2t \int\int \log|z-w|\, d\nu(w) d\sigma(z) + t^2 \int\int \log|z-w|\, d\nu(z) d\nu(w). \\ &= 2t \int p_\nu(t) d\sigma(z) + O(t^2). \\ &2t(\int_{K_n} p_\nu(z) d\mu(z) - \int_\Delta \frac{p_\nu(z)}{a} d\nu(z) + O(t). \\ &\geq 2t((I(\nu) + \frac{1}{n}) - (I(\nu) + \frac{1}{2n}) + O(t)). \end{aligned}$$

Et donc $I(\nu_t) > I(\nu)$ pour t assez petit, ce qui contredit la maximalité de ν . Donc K_n est polaire pour tout n.

On note $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Par le corollaire 4.12, E est polaire, et donc ν-négligeable. En conséquence, $p_\nu \leq 0$ ν-presque-partout.

Etape 2 : montrons par l'absurde que tous **les L_n sont vides** Supposons qu'il existe n tel que L_n ne soit pas vide. Donc il y a un $z_1 \in L_n$. On peut trouver un disque $\Delta' = \overline{D}(z_1, s)$ tel que $p_\nu < I(\nu) - \frac{1}{n}$ sur Δ'.

Comme z_1 est dans le support de ν, on a $b := \nu(\Delta') > 0$.

$$\begin{aligned} I(\nu) &= \int_K p_\nu d\nu. \\ &= \int_{\Delta'} p_\nu d\nu + \int_{K\setminus\Delta'} p_\nu d\nu. \\ &\leq b(I(\nu) - \frac{1}{n}) + I(\nu)(1-b). \\ &< I(\nu). \end{aligned}$$

C'est absurde, donc les L_n sont tous vides, et par conséquent $p_\nu \geq 0$ sur $\mathbb{C}$. Associé avec la première étape, on en déduit que $p_\nu = 0$ sur $\mathbb{C} \setminus E$. □

Ce théorème va avoir une double importance : il intervient dans le démonstration de notre théorème objectif, il permet aussi d'obtenir le théorème central suivant.

Théorème 4.14

Si K est un compact non-polaire, il admet une unique mesure d'équilibre.

De plus, $Supp(\nu) \subset \partial K$

4.3 Capacité

L'énergie est une valeur propre à chaque mesure. Cependant, l'existence de la mesure d'équilibre nous laisse penser que certaines propriétés pourraient plutôt ne dépendre que du compact concerné. C'est ce que traduit la notion de capacité.

Définition 4.15

Pour $E \subset \mathbb{C}$, la capacité de E est $c(E) = \sup_\mu e^{I(\mu)}$ avec μ à support compact inclus dans E.

En particulier, pour K compact, $c(K) = E^{I(\nu)}$ avec ν une mesure d'équilibre de K

Propriétés 4.16

1. *$E_1 \subset E_2 \Rightarrow c(E_1) \leq c(E_2)$.*
2. *Pour $E \subset \mathbb{C}$, $c(E) = \sup\{c(K), K \text{ compact } \subset E\}$.*
3. *$c(\alpha E + \beta) = |\alpha|\, c(E)$.*

Preuve : 1) et 2) découlent directement des définitions

3) Soit $T : z \mapsto \alpha z + \beta$. Alors $Supp(\mu) \subset E \Leftrightarrow Supp(\mu T^{-1}) \subset \alpha E + \beta$. De plus, $I(\mu T^{-1}) = \log|\alpha| + I(\mu)$ par changement de variable. En passant à l'exponentielle, on obtient le résultat. $\square$

Théorème 4.17 *Soit $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ une suite décroissante de compacts et $K = \bigcap_n K_n$. Alors $c(K) = \lim_{n\to+\infty} c(K_n)$.*

Preuve : Pour tous ces compacts K_n, on note ν_n une de leurs mesures d'équilibre. Par décroissance, $\nu_n \in \mathcal{P}(K_1)$ pour tout n, donc par le lemme 1.10, il existe une sous-suite $(\nu_{n_k})_k$ qui converge au sens faible* vers une mesure $\nu \in \mathcal{P}(K)$.

Par le lemme 4.7, $\limsup I(\nu_{n_k}) \leq I(\nu)$. $Supp(\nu) \subset K_n$ pour tout n donc $Supp(\nu) \subset K$ et $e^{I(\nu)} \leq c(K)$.

Le passage de la $\limsup$ à l'exponentielle se comporte bien et donc $\limsup c(K_{n_k}) \leq c(K)$. L'inégalité inverse vient par 4.16 : $c(K_1) \geq c(K_2) \geq \dots \geq c(K)$. $\square$

On peut aussi caractériser le comportement de la capacité lorsque l'on applique un polynôme inverse.

Proposition 4.18 *Soit K compact et q de coefficient dominant $a_d \neq 0$. Alors :*

$$c(q^{-1}(K)) = \left(\frac{c(K)}{|a_d|}\right)^{1/d}.$$

La démonstration utilise les fonctions de Green, qui sont des fonctions harmoniques formant une base des solutions de $\Delta = 0$ sur un domaine donné. Voir [2] pour plus de détails.

5 Retour au théorème

Soit $q : z \mapsto \sum_{j=0}^{d} a_j z^j$.

Remarque 5.1 *On peut facilement se ramener au cas $a_d = 1$ et $a_{d-1} = 0$ en conjuguant avec l'application linéaire $m : z \mapsto \frac{1}{a_d^{d-1}} z + \frac{a_{d-1}}{d}$. On pose $q_0 = m \circ q \circ m^{-1}$.*

Alors $J_{q_0} = m(J_q)$ et $F_{\infty,0} = m(F_\infty)$. Une conjugaison par un difféomorphisme holomorphe n'affecte pas la convergence de mesure que l'on souhaite établir.

Propriété 5.2 *Si J est l'ensemble de Julia associé à $\sum_{j=0}^{d} a_j z^j$, de mesure d'équilibre ν_J, alors*

$$I(\nu_J) = \frac{-1}{d-1}\log(|a_d|).$$

En particulier, les ensembles de Julia ne sont jamais polaires.

Preuve : Cela revient à démontrer que $c(J) = \frac{1}{|a_d|^{1/(d-1)}}$. Plaçons nous pour commencer dans le cas q unitaire", et on fixe un ouvert $U = \{|z| > R\}$ tel que $|q(z)| \geq 2\,|z| \quad \forall z \in U$.

On note $K_n := \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus q^{-n}(U)$, qui est est un compact pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par 4.18 $c(K_n) = c(K_0)^{1/d^n}$.

La suite des K_n est décroissante vers une limite $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus F_\infty = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} q^{-n}(U) \subset K$. On applique le théorème 4.17 et donc $C(K) = 1$. Par le théorème 4.14, $c(J) = c(K) = 1$.

Dans le cas où q n'est pas unitaire, on s'y ramène comme indiqué en 5.1, et la propriété 4.18 (sur l'évolution de la capacité par inverse de polynôme) appliquée à m donne le résultat. □

Admettons ensuite une propriété qui nous emmènerait trop loin si nous voulions détailler sa preuve.

Propriété 5.3
Pour J un Julia et ν sa mesure d'équilibre, on a $\forall \xi \in J,\ p_\nu(\xi) = I(\nu)$.

Preuve du théorème 1.9 On prend ν la mesure d'équilibre de J. Montrons qu'elle vérifie bien le théorème.

On peut se ramener à un polynôme unitaire en suivant 5.1.

On suppose donc dans la suite que q est unitaire, ce qui implique $I(\nu) = 0$. La stratégie va être de montrer que ν est la seule valeur d'adhérence de la suite (μ_n).

Soit μ une valeur d'adhérence de (μ_n) et μ_{n_j} une suite extraite qui converge faible* vers cette valeur d'adhérence. Alors, on peut adapter la preuve de 4.7 en une version simplifiée pour montrer que : $\limsup_{j\to+\infty} p_{\mu_{n_j}} \leq p_\mu(z)$. Un lemme (5.4), nous assure que $\limsup p_{\mu_{n_j}} = 0$ $\nu-$ p.p. et donc $p_\mu \geq 0$ $\nu-$p.p. sur J. Comme p_μ est semi-continue supérieure, $Supp(\nu) = J$ (lemme 5.5) implique que $p_\mu \geq 0$ sur tout J.

Ainsi, $I(\mu) \geq 0 = I(\nu)$, donc $\mu = \nu$ par unicité de la mesure d'équilibre sur J (combiner 5.2 et 5.3). Ceci montre que ν est la seule valeur d'adhérence de (μ_n) et clôt la preuve. □

Intéressons-nous aux deux lemmes mentionnés dans la preuve :

Lemme 5.4 *$\limsup p_{\mu_{n_j}} = 0$ $\nu-$ p.p. sur J.*

Preuve :

Etape 1 : $q^n(z) - w = \prod_{j=1}^{d^n}(z - \xi_j)$ (en répétant les racine multiples). Donc le potentiel de μ_n s'écrit :

$$p_{\mu_n}(z) = \frac{1}{d^n}\sum_{j=1}^{d^n} \log|z - \xi_j| = \frac{1}{d^n}\log|q^n(z) - w|\,.$$

J est stable par q, donc $q^n(z)$ reste dans J pour tout n, et $|q^n(z) - w|$ est majoré pour $n \to +\infty$. D'où $\limsup p_{\mu_n} \leq 0$.

Etape 2 :

$$\begin{aligned}
\int_J \limsup p_{\mu_{n_j}} d\nu &\geq \limsup_{j\to+\infty} \int_J p_{\mu_{n_j}} d\nu && \text{Par lemme de Fatou.}\\
&\geq \limsup_{j\to+\infty} \int_J p_\nu d\mu_{n_j} && \text{Par théorème de Fubini.}\\
&\geq 0 && \text{Par théorème de Frostman (4.13).}
\end{aligned}$$

Et donc $\limsup_{j\to+\infty} p_{\mu_{n_j}} = 0$ ν-p.p. On obtient le résultat en combinant les deux étapes.□

Lemme 5.5 *$Supp(\nu) = J$.*

Preuve :

L'inclusion directe est immédiate.

Pour l'autre sens, on prend $\xi \in J$. Si $\xi \notin Supp(\nu)$, p_ν est harmonique au voisinage de ξ par 4.2.

Par 5.3, $p_\nu(\xi) = 0$. Comme le potentiel est supérieur à l'énergie, qui est nulle, p_ν atteint un minimum en ξ. Par le principe du minimum (4.2), p_ν est identiquement nulle au voisinage de ξ. Or, tout les voisinages de ξ intersectent F_∞, domaine sur lequel on a $p_\nu > 0$. Absurde, donc $\xi \in Supp(\nu)$. □

Remarque : Ce lemme est précisément l'argument pour démontrer que 1.9 implique 1.6.

Références

[1] Kenneth Falconer. *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications.* Wiley, 2003.

[2] Thomas Ransford. *Potential Theory in the Complex Plane*, volume 28 of *London Mathematical Society Student Texts.* Press syndicate of the university of Cambridge.

Merci beaucoup à Christophe pour son temps et ses conseils.