ENSAI — École nationale de la statistique et de l'analyse de l'information	Année 2015/2016 - 1A IES - C. Gauthier
	TD 1 ALGÈBRE Réduction d'endomorphismes

Exercice 1 - Rappels

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z)$.

1. L'application f est-elle $\mathbb{R}$-linéaire ?
2. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice représentative de f dans cette base.
3. Déterminer le noyau de f. Est-elle injective ? Surjective ?
4. Déterminer le rang de f.
5. L'application f est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.
6. Soit $\mathcal{B}' = \{(1, -1, 0), (2, 1, 1), (0, 1, -1)\}$. Cette famille est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
7. Déterminer la matrice représentative de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 2

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (2x, x - y)$.

1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
2. Existe-t-il une base dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale ? Si oui, écrivez la matrice de f dans cette base.
3. Quelle est la matrice de l'endomorphisme $f^n = f \circ f \circ ... \circ f$ dans cette base ?
4. Quelle est la matrice de l'endomorphisme f^n dans la base canonique.

Exercice 3

Diagonaliser les matrices suivantes $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

On donnera aussi la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

Montrer que A est diagonalisable et calculer ses valeurs propres. En déduire qu'il existe une matrice B telle que $B^3 = A$.

Exercice 5

Soient $n \geq 1$ et $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = A$. Le but de cet exercice est de montrer que A est nilpotente.

1. Montrer que $\forall\, k \geq 0$, on a $A^k B - BA^k = kA^k$.
2. On considère $\varphi_B : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi_B(M) = MB - BM$.
   Vérifier que φ_B est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.
3. Justifier que si $A^k \neq 0$ alors k est valeur propre de φ_B.
4. En déduire l'existence d'un entier $k \geq 0$ tel que $A^k = 0$.

Exercice 6

Soit m un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les valeurs propres de f ?
2. Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme est-il diagonalisable ?
3. On suppose $m = 2$. Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 7

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A.
2. Calculer A^n en fonction de n.
3. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par leur premier terme u_0, v_0 et w_0 et les relations suivantes pour $n \geq 0$:
$$\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} = 3u_n + 6v_n + 5w_n \end{cases}$$
On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et de X_n. En déduire u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 8

1. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Résoudre le système $X'(t) = AX(t)$ où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.
3. On considère le système $X_{n+1} = AX_n + B$ où $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Déterminer la solution de ce système.

Exercice 9

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ rapporté à la base canonique $\mathcal{B}_0$.
   (a) Calculer les valeurs propres de A et pour chaque valeur, déterminer un vecteur propre associé dont la troisième composante est 1.
   (b) Ecrire la matrice de passage P de la base canonique à la base de vecteurs propres.
   (c) Calculer A^k, $k \in \mathbb{K}$.
2. On considère les suites définies par la donnée de u_0, u_1, u_2 et une relation récurrente $u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2} - 2u_{n-3}$ pour $n \geq 3$.
   (a) On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$. Exprimer X_n en fonction de X_{n-1} pour $n \geq 3$.
   (b) Déterminer X_n en fonction de A, de n et de X_2.
   (c) Calculer u_n en fonction de n, u_0, u_1 et u_2.
   (d) Pour quelles valeurs de u_0, u_1 et u_2 la suite u_n est-elle bornée ?
3. On considère le système différentiel suivant :
$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) - 2z(t) + 2t + 1 \\ y'(t) = x(t) \\ z'(t) = y(t) \end{cases}$$
où x, y, z sont des fonctions de la variable t.

(a) Déterminer les solutions du système différentiel homogène associé.

(b) Déterminer toutes les solutions du système.

(c) En déduire l'unique solution ω qui vérifie l'équation :

$$\phi'''(t) = 2\phi''(t) + \phi'(t) - 2\phi(t) + 2t + 1$$

avec $\omega(0) = 3$, $\omega'(0) = 3$ et $\omega''(0) = 5$.

Exercice 10

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = -Id$.

1. Donner un exemple d'un tel endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f n'a pas de valeur propre réelle. En déduire que la dimension de E est paire.
3. Montrer que $\forall x \in E$, $Vect(x, f(x))$ est stable par f.
4. En déduire que si $dimE = 2n$, il existe des vecteurs $(e_1, ..., e_n)$ tels que $(e_1, f(e_1), ..., e_n, f(e_n))$ forme une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette base ?