ENSAI École nationale de la statistique et de l'analyse de l'information	Année 2015/2016 - 1A IES - C. Gauthier **TD 2 ALGÈBRE** Suites récurrentes linéaires

Exercice 1
Déterminer explicitement les suites réelles solutions des équations suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - 3u_n = n^2 - n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} + u_n = 2n(-1)^n + 4$.

Exercice 2
Un épargnant décide de placer 1000 euros à la banque. On lui propose deux placements :

- le placement A est un placement à intérêts simples rémunéré à 3 % par an,
- le placement B est un placement à intérêts composés rémunéré à 2 % par an.

Remarque :
• Placement de 100 euros à un taux annuel de 5% d'intérêts simples sur 2 ans : $\text{interets} = 100 \times \frac{5}{100} \times 2 = 10$ euros.
• Placement de 100 euros à un taux annuel de 5% d'intérêts composées sur 2 ans : $\text{interets1} = 100 \times \frac{5}{100} = 5$ euros pour la première année puis $\text{interets2} = 105 \times \frac{5}{100} = 5.25$ euros pour la deuxième année soit au total 10.25 euros.
On note (u_n) et (v_n) les suites donnant la somme épargnée au bout de n années.
Déterminer la nature de (u_n) et (v_n), donner la valeur de u_n et de v_n en fonction de n puis déterminer au bout de combien d'années le placement B devient plus intéressant que le placement A.
Déterminer pour chacun des deux placements au bout de combien d'années la somme de départ sera doublée.

Exercice 3
Déterminer explicitement les suites réelles solutions des équations suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 2n^2 - n$,
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n) + 1$,
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_n = n - 1$,
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 2^n$.

Exercice 4
Déterminer les suites complexes solutions de l'équation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n + P(n)$$

pour $P(n) = 7 \times 4^n$, $P(n) = n2^n$, $P(n) = 3 \times 4^n - 5n2^{n+3}$.

Exercice 5
Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Exprimer en fonction de k le terme général de la suite (M_k) de matrices de $M_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$\begin{cases} M_0 \text{ donnée} \\ M_{k+1} = AM_k + B \end{cases}$$

Exercice 6
Pour un pays, les économistes désignent par :

— R_n le revenu national au cours de l'année n,
— C_n la consommation de l'année n,
— D_n la dépense nationale de l'année n,
— I_n l'investissement de l'année n,

— s la propension marginale à consommer,
— v le rapport de l'investissement.

Une façon simple de modéliser l'économie d'un pays se fait via les relations suivantes :

$$\begin{cases} R_n = C_n + I_n + D_n \\ C_n = sR_{n-1} \\ I_n = vs(R_{n-1} - R_{n-2}) \end{cases}$$

Pour simplifier, on suppose la dépense nationale constante c'est-à-dire $D_n = D = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$. On estime également $s = 1.5$ et $v = 0.5$.

1. Déterminer, à l'aide des relations données, une relation entre R_n, R_{n-1} et R_{n-2}.
2. On s'intéresse dans cette question aux suites (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_n = 2.25u_{n-1} - 0.75u_{n-2}$.
   (a) Résoudre $x^2 - 2.25x + 0.75 = 0$. On donnera les solutions sous forme exacte et on les notera x_1 et x_2 avec $x_1 < x_2$.
   (b) Démontrer que les deux suites géométriques de raison x_1 et x_2 vérifient la relation de récurrence donnée.
3. Démontrer que, quels que soient les réels A et B, la suite de terme général $r_n = Ax_1^n + Bx_2^n - 2$ satisfait la relation de la question 1.
4. Déterminer les réels A et B tels que l'on ait $r_0 = 1.5$ et $r_1 = 1.8$. On se contentera ici de valeurs approchées à 0.1 près. On note (R_n) la suite associée à ces valeurs.
5. En déduire une approximation du revenu national au cours de l'année 4.
6. En supposant que l'évolution se poursuive en suivant le même modèle, quelle sera la limite de R_n quand n tendra vers l'infini ?

Exercice 7 - Application aux sondages

Pendant la durée d'une campagne électorale mettant en présence trois candidats A, B et C, on publie les résultats de sondage effectués aux dates 1,2,...,n... On note a_n, b_n, c_n les proportions d'électeurs partisans respectivement des candidats A, B et C à la date n. Chaque sondage fait apparaître une modification des ces proportions telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = MX_n \text{ où } X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.05 \\ 0.2 & 0.8 & 0.05 \\ 0.1 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

1. Comment peut-on interpréter les colonnes de la matrice M ?
2. Sachant que $a_0 = 0.31$, $b_0 = 0.29$, $c_0 = 0.40$, déterminer X_n et sa limite quand n tend vers l'infini.