ENSAI École nationale de la statistique et de l'analyse de l'information	Année 2015/2016 - 1A IES - C. Gauthier **TD 3 ALGÈBRE** Produit scalaire et orthogonalité

Exercice 1
Soit φ la forme bilinéaire de $(\mathbb{R}_2[X])^2$ définie par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X], \varphi(P, Q) = P(1)Q(-1) + P(-1)Q(1).$$

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Donner sa matrice représentative par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2
Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par la formule :

$$q(x, y, z) = x^2 + 4xy + 6xz + 4y^2 + 16yz + 9z^2.$$

Déterminer la forme bilinéaire symétrique associée à q et sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3
Soit $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(A, B) = Tr(A^t B)$.

1. Vérifier que φ est une application bilinéaire.
2. Quelle est sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$?

Exercice 4
Soit $E = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On pose :

$$\forall f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2), \ q(f)\lambda Tr(f^2) + \mu \det(f).$$

Vérifier que q est une forme quadratique.

Exercice 5
A deux polynômes $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ et $Q = b_0 + b_1 X + b_2 X^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on associe :

$$< P, Q >= (a_0 + a_1).b_0 + (a_0 + 3a_1).b_1 + 3a_2.b_2$$

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Exercice 6
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de la forme $aX^2 + bX + c$, a, b, $c \in \mathbb{R}$. On définit pour $P, Q \in E$:

$$< P|Q >= \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

1. Montrer que cela définit un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormale (P_0, P_1, P_2) de E à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Exercice 7
Soit B la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$ définie pour $v = (x, y, z)$ et $v' = (x', y', z')$ par :

$$B(v, v') = (x + y + z)(x' + y' + z') + (y + z)(y' + z') + zz'.$$

1. Montrer que B est un produit scalaire.

2. On fait de $\mathbb{R}^3$ un espace euclidien en le munissant de ce produit scalaire. À partir de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, construire une base orthonormée par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Exercice 8
Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère le plan P engendré par les vecteurs $e_1 = (1, 0, 1)$ et $e_2 = (2, 1, 0)$. On pose $x = (1, 2, 3)$.

1. Déterminer l'unique y de P tel que $\forall z \in P$, $< x - y, z >= 0$.
2. Montrer que $\forall z \in P$, $\|x - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2$

Exercice 9
Sur $\mathbb{R}_3[X]$, on considère les formes bilinéaires suivantes. Dire lesquelles sont des produits scalaires. Justifier.

1. $\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$,
2. $\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1}(P'(t)Q(t) + P(t)Q'(t))dt$,
3. $\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P'(t)Q'(t)dt + P(0)Q(0)$.

Exercice 10
Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Soit F le plan vectoriel défini par l'équation $x + y + z = 0$.

1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Déterminer $F^{\perp}$ et en donner une base orthonormale.

Exercice 11
Les bases définies ci-après de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ sont-elles orthogonales ? orthonormales ?

1. $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
2. $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$
3. $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
4. $\vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 12
Déterminer une base orthonormale du plan vectoriel d'équation $2x - y + 3z = 0$.

Exercice 13
Déterminer une base orthonormale du plan vectoriel P d'équation $x - y - z = 0$.

Exercice 14
Soient a, b, c et d quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que :

1. $a \wedge (b \wedge c) = (a|c)b - (a|b)c$.
2. $\det(a, b, c) = (a|(b \wedge c)) = ((a \wedge b)|c)$.
3. $(a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = \left\{ \begin{array}{l} c(a|(b \wedge d)) - d(a|(b \wedge c)) \\ -a(b|(c \wedge d)) + b(c|(d \wedge a)) \end{array} \right.$

Exercice 15

1. Chercher un vecteur orthogonal au plan qui passe par les points P(1,4,6), Q(-2,5,-1) et R(1,-1,1).
2. Calculer l'aire du triangle PQR.
3. Calculer l'aire du parallélépipède construit sur les vecteurs a(1,0,6), b(2,3,-8) et c(8,-5,6).