ENSAI École nationale de la statistique et de l'analyse de l'information	Année 2015/2016 - 1A IES - C. Gauthier
	TD 4 ALGÈBRE Projections

Exercice 1
On considère un espace vectoriel euclidien E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Former la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur le plan P d'équation : $x + y + z = 0$.

Exercice 2
On considère $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{B}^4$ défini par :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = x - y + z - t = 0\}$$

1. Déterminer une base orthonormale du supplémentaire orthogonal de F.
2. Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.

Exercice 3
Donner la matrice de la projection orthogonale sur la droite d'équation $3x = 6y = 2z$ dans la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
De manière générale, donner la matrice de la projection orthogonale sur le vecteur unitaire $u = (a, b, c)$ et de la projection orthogonale sur le plan d'équation $ax + by + cz = 0$ dans la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4
Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Soit φ le produit scalaire défini sur E^2 par :

$$\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2).$$

Soit f la projection orthogonale sur le sous-espace $E = \mathbb{R}_1[X]$.

1. Déterminer un polynôme P_1 orthogonal à la famille $\{1, X\}$.
2. Écrire A la matrice de f dans la base $\{1, X, P_1\}$.
3. En déduire B la matrice de f dans la base canonique de E.
4. Déterminer alors le projeté orthogonam du polynôme $2X^2 + 3X + 4$.
5. Vérifier de deux façons que $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de f.

Exercice 5
Soient E un espace euclidien de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) sa base canonique et $\epsilon_1 = (1, 1, 1)$ et $\epsilon_2 = (-1, 2, 1)$ dans cette base.
On définit alors $\Pi = Vect(\epsilon_1, \epsilon_2)$ un plan de E.

1. (a) Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur Π dans la base canonique. On notera p cette application.
   (b) En déduire le projeté orthogonal $\hat{x}$ de $x = (1, 2, 3)$ ainsi que la distance euclidienne d entre x et Π.
2. On propose une autre méthode.
   (a) Orthonormaliser la base des $(\epsilon_i)_{1 \leq i \leq 3}$. On notera $(\tilde{\epsilon}_i)_{1 \leq i \leq 3}$ dans cette base.
   (b) A-t-on $\Pi = Vect(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)$? Justifier.
   (c) Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases orthonormales de E euclidien et P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$. Montrer que P est orthogonale c'est-à-dire ${}^tPP = I$.
   (d) Justifier alors, sans (re)faire les calculs, comment l'étape 2.(a) permet de déterminer la matrice de p plus facilement.

Exercice 6 - bonus

Soient $(P_i)_{1\leq i\leq N} = (x_i, y_i)_{1\leq i\leq N}$ un ensemble de N points de $\mathbb{R}^2$. On se propose d'étudier un ajustement linéaire de ces N points par une droite du type $y = ax + b$.

La méthode consiste donc à minimiser la somme des erreurs du modèle soit la quantité :

$$E(a, b) = \sum_{i}^{N} e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i - b)^2.$$

Il s'agit là d'une technique très utilisée en statistique lorsqu'on pressent (par exemple à partir d'une représentation graphique des données) une dépendance affine entre les observations.

1. Mettre le problème précédent sous forme d'une problème des moindres carrés linéaires.
2. Caractériser la solution à l'aide du théorème de projection orthogonale sur une variété linéaire à préciser et donner l'expression de la solution.

   On mesure la longueur l d'un barreau métallique chauffé à la température θ sous la pression P. Les mesures conduisent à postuler que l'allongement est régi par une loi de la forme :

   $$l = (a\theta + b\theta^3)\mathrm{e}^{-cP}$$

   où a, b et c sont trois paramètres du modèle à estimer.

   On effectue m mesures $(\theta_k, P_k, l_k)_{k=1,..,m}$ de longueurs dans différentes conditions de température et de pression.
3. On suppose connue la valeur du paramètre c. Proposer une méthode d'estimation par moindres carrés linéaires de a et de b.
4. Caractériser la solution à l'aide du théorème de projection orthogonale sur une variété linéaire à préciser.