

Groupes finis à connaître :

G	Ordre	Abélien ?	Simple ?	$Z(G)$	$D(G)$	$\text{Aut}(G)$
$\{e\}$	1	Oui	Non	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} (n \in \mathbb{N}^*)$	n	Oui	Oui ssi n est premier	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$\{e\}$	$((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \times)$
V (Groupe de Klein)	4	Oui	Non	V	$\{e\}$	$\mathfrak{S}_3$
$D_n (n \text{ pair} \geq 4)$	$2n$	Non	Non	$\{e, r^{n/2}\}$	$\langle r^2 \rangle$	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$
$D_n (n \text{ impair} \geq 3)$	$2n$	Non	Non	$\{e\}$	$\langle r \rangle$	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$
$\mathfrak{S}_1 = \{Id\}$	1	Oui	Non	$\{Id\}$	$\{Id\}$	$\{Id\}$
$\mathfrak{S}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	2	Oui	Oui	$\mathfrak{S}_2$	$\{Id\}$	$\{Id\}$
$\mathfrak{S}_6$	$720 = 6!$	Non	Non	$\{Id\}$	$\mathfrak{A}_6$	$\mathfrak{S}_6 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$\mathfrak{S}_n (n \neq 1, 2, 6)$	$n!$	Non	Non	$\{Id\}$	$\mathfrak{A}_n$	$\mathfrak{S}_n$
$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \{e\}$	1	Oui	Non	$\{Id\}$	$\{Id\}$	$\{Id\}$
$\mathfrak{A}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	3	Oui	Oui	$\mathfrak{A}_3$	$\{Id\}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$\mathfrak{A}_4$	12	Non	Non	$\{Id\}$	V	$\mathfrak{S}_4$
$\mathfrak{A}_6$	$360 = 6!/2$	Non	Oui	$\{Id\}$	$\mathfrak{A}_6$	$\mathfrak{S}_6 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$\mathfrak{A}_n (n = 5 \text{ ou } n \geq 7)$	$n!/2$	Non	Oui	$\{Id\}$	$\mathfrak{A}_n$	$\mathfrak{S}_n$
$\mathcal{Q}_8$ (Quaternions)	8	Non	Non	$\{-1, 1\}$	$\{-1, 1\}$	$\mathfrak{S}_4$
Dic_3 $\langle a, x \mid a^6 = e, x^2 = a^3, x^{-1}ax = a^{-1} \rangle$	12	Non	Non	$\{e, x^2\}$	$\{e, a^2, a^4\}$	$\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z})^*$

Les résultats classiques de classification : $p < q$ sont deux nombres premiers.

Si $|G| = 1$ Alors $G \simeq \{e\}$.

Si $|G| = 4$ Alors $G \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou $G \simeq V \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. (Cas particulier de p^2)

Si $|G| = 6$ Alors $G \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ou $G \simeq D_3 \simeq \mathfrak{S}_3$. (Cas particulier de $2p$)

Si $|G| = p$ Alors $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Si $|G| = 2p$ Alors $G \simeq \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ ou $G \simeq D_p$.

Si $|G| = p^2$ Alors $G \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Si $|G| = pq$ Alors G est isomorphe à un produit semi-direct $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Si p ne divise pas $q - 1$, alors le produit est direct et $G \simeq \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.

Si $|G| = 8$ Alors G est isomorphe à un unique groupe parmi $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathcal{Q}_8$ et D_4 .

Si $|G| = 12$ Alors G est isomorphe à un unique groupe parmi $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, D_6 , $\mathfrak{A}_4$ et Dic_3 .

Si G abélien de type fini Alors il existe un unique $r \in \mathbb{N}$, et des uniques entiers $k_1, \dots, k_m$ tels que $2 \leq k_n \mid \dots \mid k_1$ et $G \simeq \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}/k_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/k_n\mathbb{Z}$.