

Théorie des groupes

Contrôle continu 1 - 1 heure

6 Octobre 2014

Il est conseillé d'apporter un soin tout particulier à la précision de la rédaction.

Exercice 1 Soit H un sous-ensemble non vide d'un groupe G , stable par la loi de groupe.

1. Le sous-ensemble H est-il un sous-groupe de G ?
2. On suppose de plus H de cardinal fini. H est-il un sous-groupe de G ?

Exercice 2

1. Soit φ un morphisme d'un groupe fini $(G, *)$ vers (\mathbb{C}^*, \times) . On suppose que φ n'est pas une application constante. Calculer

$$\sum_{x \in G} \varphi(x)$$

2. En déduire que pour n entier supérieur à 2, la somme des racines n -ièmes de l'unité est nulle.

Exercice 3 Soit G un groupe d'ordre 4. On suppose que G n'est pas cyclique.

1. Montrer que tous les éléments de G sont d'ordre 1 ou 2.
2. Montrer que G est abélien.
3. Montrer que G est isomorphe au produit direct de deux de ses sous-groupes.
4. En déduire la classification des groupes d'ordre 4. *Une classification est une liste de groupes non-isomorphes 2 à 2 telle que tout groupe d'ordre 4 soit isomorphe à un des groupes de cette liste.*

Exercice 4 Quels sont les automorphismes de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$?