Théorie des groupes

Contrôle continu 1 - 1 heure

6 Octobre 2014

Il est conseillé d'apporter un soin tout particulier à la précision de la rédaction.

Exercice 1 Soit H un sous-ensemble non vide d'un groupe G, stable par la loi de groupe.

1. Le sous-ensemble H est-il un sous-groupe de G ?
2. On suppose de plus H de cardinal fini. H est-il un sous-groupe de G ?

Correction :

1. Non. Contre-exemple : $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe mais $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ est stable par $+$ sans être un groupe (1 n'a pas d'inverse).
2. Oui. Soit $g \in H$ On s'intéresse à l'ensemble $E_g = \{g^n | n \in \mathbb{N}\}$. Comme $E_g \subset H$, E_g est fini. Donc il existe $n > m$ tel que $g^n = g^m$. Si $n = m + 1$, $g = e_H$ donc $g^{-1} \in H$. Sinon, $g^{n-m+1} \in H$ et $g.g^{n-m+1} = e_H$ donc $g^{-1} \in H$.
   H est stable par inverse et par produit, donc est un sous-groupe de G.

Exercice 2

1. Soit φ un morphisme d'un groupe fini $(G, *)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$. On suppose que φ n'est pas une application constante. Calculer
$$\sum_{x \in G} \varphi(x)$$
2. En déduire que pour n entier superieur à 2, la somme des racines n-iemes de l'unité est nulle.

Correction :

1. ϕ n'est pas constante, donc il existe $a \in G$ tel que $\varphi(a) \neq 1$. Alors $\psi : x \mapsto a.x$ est une bijection de G dans G, et :
$$\sum_{x \in G} \varphi(x) = \sum_{\psi^{-1}(x) \in G} \varphi(x)$$
$$\sum_{x \in G} \varphi(x) = \sum_{x \in G} \varphi(a.x)$$
$$\sum_{x \in G} \varphi(x) = \sum_{x \in G} \varphi(a)\varphi(x)$$
$$\sum_{x \in G} \varphi(x) = \varphi(a) \sum_{x \in G} \varphi(x)$$
   Comme $\varphi(a) \neq 1$, on a forcément $\sum\limits_{x \in G} \varphi(x) = 0$
2. Application de la question 1 avec $G = \Gamma_n$ le groupe des racines n-ièmes de l'unité et $\varphi = Id_{\mathbb{C}}$.

Exercice 3 Soit G un groupe d'ordre 4. On suppose que G n'est pas cyclique.

1. Montrer que tous les éléments de G sont d'ordre 1 ou 2.
2. Montrer que G est abélien.
3. Montrer que G est isomorphe au produit direct de deux de ses sous-groupes.
4. En déduire la classification des groupes d'ordre 4. *Une classification est une liste de groupes non-isomorphes 2 à 2 telle que tout groupe d'ordre 4 soit isomorphe à un des groupes de cette liste.*

Correction :

1. L'ordre d'un élément est plus petit que l'ordre du groupe, donc peut être 1,2,3, ou 4. Si G possède un élément d'ordre 4, cet élément engendre G, qui serait donc cyclique. Absurde. Si G possède un élément d'ordre 3 : Notons g cet élément. On a alors $G = \{e, g, g^2, h\}$, où h est un élément différent de e, g et g^2.
   Si $g.h = e$, alors $h = g^2$, absurde.
   Si $g.h = g$, alors $h = e$, absurde.
   Si $g.h = g^2$, alors $h = g^2$, absurde.
   Si $g.h = h$, alors $g = e$, absurde.
   Donc G ne possède pas d'élément d'ordre 3, et ne contient donc que des éléments d'ordre 1 ou 2.
2. Soient g et h dans G.
   $g.h \in G$, donc est d'ordre 1 ou 2. Dans tous les cas, $(g.h)^2 = e$. En multipliant à droite par $h^{-1}.g^{-1}$, on a $g.h = h^{-1}.g^{-1}$.
   h et g étant d'ordre 1 ou 2, ils sont leur propre inverse, d'où $g.h = h.g$.
3. Soient a, b et c les trois éléments distincts d'ordre 2 de G. On a :
   - $< a > \cap < b >= e$
   - $a.b = c$ (Une autre valeur pour ce produit serait absurde), donc $< a >< b >= G$.
   - G est abélien, donc les éléments de $< a >$ commutent avec ceux de $< b >$.

   On peut donc appliquer le théorème d'isomorphisme à un produit direct pour écrire que $G \simeq < a > \times < b >$.
4. Soit G un groupe d'ordre 4. Distinguons deux cas :
   Si G est cyclique, il est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
   Sinon, on est dans le cas des premières questions, et g est isomorphe au produit de deux groupes d'ordre 2. Il n'y a à isomorphisme près qu'un seul groupe d'ordre 2, qui est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. D'où $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
   A isomorphisme près, les seuls groupes d'ordre 4 sont donc $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 4 Quels sont les automorphismes de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$?

Correction :

Soit $\alpha \in Aut(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$.

$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est cyclique généré par 1, donc α est entièrement déterminé par $\alpha(1)$, et pour tout $n \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, on a $\alpha(n) = n.\alpha(1)$.

α étant un automorphisme, il conserve l'ordre. Donc $\alpha(1)$ est d'ordre 6, c'est à dire premier avec 6. D'où $\alpha(1) \in \{1, 5\}$.

Réciproquement, $\alpha_1 : x \mapsto x$ est bien un automorphisme, et $\alpha_5 : x \mapsto 5.x$ aussi (α_5 est sa propre réciproque).

Bilan : Les automorphismes de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ sont donc Id et $-Id$.