Théorie des groupes

Contrôle continu 2 - 1 heure

17 Novembre 2014

Exercice 1 Soit G un groupe. Un sous-groupe H de G est dit *caractéristique* si pour tout $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, on a $\alpha(H) = H$. Cela est noté $H \blacktriangleleft G$.

On appelle groupe dérivé de G, noté $D(G)$, le groupe engendré par les commutateurs de G. C'est à dire $D(G) =< \{xyx^{-1}y^{-1} | x, y \in G\} >$. Montrer que le groupe dérivé est caractéristique.

Exercice 2 Soit $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.

1. Montrer que $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.
2. Montrer que $\mathbb{U}$ est isomorphe à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
3. Montrer que $\mathbb{C}^*/\mathbb{U}$ est isomorphe à $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 On note $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 10 & 8 & 9 & 1 & 5 & 3 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. Déterminer sa décomposition canonique en produit de cycles disjoints ainsi que σ^{203}.

Exercice 4 Soit G un groupe d'ordre 77 agissant sur un ensemble X de cardinal 41. Montrer que l'action de G sur X admet forcément un point fixe.

Exercice 5 Soit $\mathcal{T}$ un tétraèdre de l'espace euclidien de dimension 3 centré en O l'origine de l'espace.

On note $Isom(\mathcal{T})$ l'ensemble des transformations linéaires de l'espace qui préservent le tétraèdre $\mathcal{T}$. C'est à dire que $Isom(\mathcal{T}) = \{M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}),\ M(\mathcal{T}) = \mathcal{T}\}$.

1. Expliquer pourquoi $Isom(\mathcal{T})$ peut se voir comme un groupe agissant sur les sommets de $\mathcal{T}$.
2. Cette action nous donne un morphisme $\varphi : Isom(\mathcal{T}) \to \mathfrak{S}_4$. Montrer que φ est surjective.
   On pourra faire des dessins
3. Calculer $\ker \varphi$ et en déduire que $Isom(\mathcal{T})$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.