

Théorie des groupes

Contrôle continu 2 - 1 heure

17 Novembre 2014

Exercice 1 Soit G un groupe. Un sous-groupe H de G est dit *caractéristique* si pour tout $\alpha \in \text{Aut}(G)$, on a $\alpha(H) = H$. Cela est noté $H \triangleleft G$.

On appelle groupe dérivé de G , noté $D(G)$, le groupe engendré par les commutateurs de G . C'est à dire $D(G) = \langle \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G\} \rangle$. Montrer que le groupe dérivé est caractéristique.

Correction : Soit $\alpha \in \text{Aut}(G)$. Pour tout x et y dans G , on a :

$$\alpha(xyx^{-1}y^{-1}) = \alpha(x)\alpha(y)\alpha(x^{-1})\alpha(y^{-1}) = \alpha(x)\alpha(y)\alpha(x)^{-1}\alpha(y)^{-1}$$

L'image d'un commutateur est donc un commutateur. C'est à dire : $\alpha(xyx^{-1}y^{-1}) \in D(G)$.

Comme les commutateurs engendrent $D(G)$, on a $\alpha(D(G)) \subset D(G)$.

Le résultat est en particulier vrai pour $\alpha^{-1} \in \text{Aut}(G)$. On a alors $\alpha^{-1}(D(G)) \subset D(G)$ et donc $D(G) \subset \alpha(D(G))$. D'où $\alpha(D(G)) = D(G)$.

Exercice 2 Soit $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.

1. Montrer que $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.
2. Montrer que $\mathbb{U}$ est isomorphe à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
3. Montrer que $\mathbb{C}^*/\mathbb{U}$ est isomorphe à $\mathbb{R}_+^*$.

Correction :

1. Soit $x, y \in \mathbb{U}$. Alors y^{-1} est de module 1, et donc xy^{-1} est de module 1. Comme $1 \in \mathbb{U}$, $\mathbb{U}$ est non-vide et est donc un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.

2. On pose $\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{U} \\ \theta & \mapsto & e^{2i\pi\theta} \end{array}$.

φ_1 est un morphisme car $\varphi_1(\alpha + \beta) = e^{2i\pi(\alpha+\beta)} = e^{2i\pi\alpha}e^{2i\pi\beta} = \varphi_1(\alpha).\varphi_1(\beta)$ pour tout α et β réels.

φ_1 est surjective : Si $z \in \mathbb{U}$, z peut s'écrire $e^{i\theta}$ et donc $z = \varphi_1(\frac{\theta}{2\pi})$.

$\ker \varphi_1 = \{\theta \in \mathbb{R}, e^{2i\pi\theta} = 1\} = \mathbb{Z}$. Par le premier théorème d'isomorphisme :

$$\mathbb{R}/\ker \varphi_1 \cong \text{im } \varphi_1$$

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{U}$$

3. On pose $\varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \rightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ z & \mapsto & |z| \end{array}$.

φ_2 est un morphisme par multiplicativité du module, et est surjective puisqu'elle coïncide avec l'identité sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\ker \varphi_2 = \{z \in \mathbb{C}^*, |z| = 1\} = \mathbb{U}$.

Par le premier théorème d'isomorphisme :

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \cong \mathbb{R}_+^*$$

Exercice 3 On note $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 10 & 8 & 9 & 1 & 5 & 3 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. Déterminer sa décomposition canonique en produit de cycles disjoints ainsi que σ^{203} .

Correction : $\sigma = (1\ 6\ 5)(2\ 10\ 7\ 3\ 8)(4\ 9)$.

$(1\ 6\ 5)$ est d'ordre 3, donc $(1\ 6\ 5)^{203} = (1\ 6\ 5)^2 = (1\ 5\ 6)$.

$(2\ 10\ 7\ 3\ 8)^{203} = (2\ 10\ 7\ 3\ 8)^3 = (2\ 3\ 10\ 8\ 7)$.

$(4\ 9)^{203} = (4\ 9)$

Comme des cycles à supports disjoints commutent, on a $\sigma^{203} = (1\ 5\ 6)(2\ 3\ 10\ 8\ 7)(4\ 9)$

Exercice 4 Soit G un groupe d'ordre 77 agissant sur un ensemble X de cardinal 41. Montrer que l'action de G sur X admet forcément un point fixe.

Correction : Le cardinal des orbites divise l'ordre du groupe. Elles peuvent donc être de taille 1, 7, 11 ou 77. Il est bien sûr impossible d'avoir une orbite de taille 77 dans un ensemble de cardinal 41.

Supposons que l'action n'a pas de point fixe. C'est équivalent à dire qu'elle n'a pas d'orbite de taille 1. Notons x le nombre d'orbites de taille 7 et y le nombre d'orbites de taille 11.

Les orbites formant une partition de X , on a (formule des classes) : $7x + 11y = 41$.

En regardant cette égalité modulo 7, on obtient :

$$4y \equiv 6[7]$$

4 étant inversible dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ (car 7 est premier avec 4), d'inverse 2, cette congruence est équivalente à

$$y \equiv 5[7]$$

Et donc $y = 5 + 7k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Donc $11y \geq 55$. Or on doit avoir $11y \leq 41$, donc ceci est absurde. Notre hypothèse de départ est donc fautive, et l'action admet au moins un point fixe.

Exercice 5 Soit $\mathcal{T}$ un tétraèdre de l'espace euclidien de dimension 3 centré en O l'origine de l'espace.

On note $Isom(\mathcal{T})$ l'ensemble des transformations linéaires de l'espace qui préservent le tétraèdre $\mathcal{T}$. C'est à dire que $Isom(\mathcal{T}) = \{M \in GL_3(\mathbb{R}), M(\mathcal{T}) = \mathcal{T}\}$.

1. Expliquer pourquoi $Isom(\mathcal{T})$ peut se voir comme un groupe agissant sur les sommets de $\mathcal{T}$.
2. Cette action nous donne un morphisme $\varphi : Isom(\mathcal{T}) \rightarrow \mathfrak{S}_4$. Montrer que φ est surjective.

On pourra faire des dessins

3. Calculer $\ker \varphi$ et en déduire que $Isom(\mathcal{T})$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

Correction :

1. Remarquons tout d'abord que $Isom(\mathcal{T})$ est bien un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{R})$, puisque stable par produit et par inverse.

Notons 1, 2, 3, 4 les quatre sommets du tétraèdre. Alors, $\mathcal{T}$ est l'ensemble des barycentres (à coefficients positifs) de ces 4 points. De plus, c'est le seule ensemble de quatre points vérifiant cette propriété.

Comme une application linéaire f préserve les barycentres, $f(\mathcal{T})$ est l'ensemble des barycentres de $f(1), f(2), f(3), f(4)$. Et comme $f(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$, ce sont aussi les barycentres de 1, 2, 3, 4.

Ainsi, on a forcément $f(\{1, 2, 3, 4\}) = \{1, 2, 3, 4\}$, et tout élément de $Isom(\mathcal{T})$ induit une permutation des 4 sommets de $\mathcal{T}$. Cela revient bien à voir $Isom(\mathcal{T})$ comme agissant sur les sommets de $\mathcal{T}$.

2. Soit $(i\ j)$ une transposition de $\mathfrak{S}_4$. On note a et b les deux sommets restants (n'étant pas dans le support de $(i\ j)$).

On note k le milieu du segment $[i, j]$. Soit P le plan vectoriel contenant a, b et k .

Soit s la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^3$ par rapport à P . aij est un triangle équilatéral, donc (ak) est orthogonale à (ij) . De même (bk) est orthogonale à (ij) . (ak) et (bk) étant deux droites non-colinéaires de P , on en déduit que P tout entier est orthogonal à (ij) .

Et donc, on pour s les images suivantes :

$$s(a) = a, \quad s(b) = b, \quad s(i) = j, \quad s(j) = i$$

Ce qui revient à dire que $\varphi(s) = (i\ j)$. Ainsi, toutes les transpositions ont un antécédent. Comme les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_4$ et que φ est un morphisme, on en déduit que tous les éléments de $\mathfrak{S}_4$ ont un antécédent et que φ est surjective.

3. Soit $f \in \ker \varphi$. Alors $f(a) = a, f(b) = b, f(c) = c$. (et on a toujours $f(O) = O$). Donc, l'image de la base (Oa, Ob, Oc) est (Oa, Ob, Oc) . (Il s'agit bien d'une base car ce sont trois vecteurs non-coplanaires). Ainsi, f laisse stable une base de $\mathbb{R}^3$ donc $f = \text{Id}$, et $\ker \varphi$ est réduit au neutre.

En appliquant le premier théorème d'isomorphisme, on obtient alors :

$$\text{Isom}(\mathcal{T}) \cong \mathfrak{S}_4$$