Théorie des groupes

Contrôle continu 1 - 1 heure

12 Octobre 2015

Il est conseillé d'apporter un soin tout particulier à la précision de la rédaction.

Exercice 1 Énoncer et prouver la formule des indices.

Exercice 2 Répondre par « vrai » ou « faux »à la question suivante. *Répondre « vrai » implique que vous donniez une preuve complète et valide de l'assertion ; répondre « faux » implique que vous donniez une preuve complète et valide de la négation de l'assertion proposée*.

Soient G, H deux groupes non triviaux. Soit $\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(H)$ un morphisme de groupes. Le produit semi-direct $G \rtimes_\alpha H$ n'est pas un groupe simple.

Exercice 3 Soit G un groupe d'ordre 4. On suppose que G n'est pas cyclique.

1. Montrer que tous les éléments de G sont d'ordre 1 ou 2.
2. Montrer que G est abélien.
3. Montrer que G est isomorphe au produit direct de deux de ses sous-groupes.
4. En déduire la classification des groupes d'ordre 4. *Une classification est une liste de groupes non-isomorphes 2 à 2 telle que tout groupe d'ordre* 4 *soit isomorphe à un des groupes de cette liste.*

Exercice 4 Soit G un groupe ayant exactement 2 sous-groupes propres (c'est à dire distincts de G et $\{e\}$).

1. Montrer que G est fini.
2. Montrer que G est monogène.
3. En déduire que G est cyclique d'ordre pq ou p^3 avec p et q des nombres premiers distincts.