

Théorie des groupes

Contrôle continu 2 - 1 heure

30 Novembre 2015

Exercice 1 Répondre par « vrai » ou « faux » à la question suivante. *Répondre « vrai » implique que vous donniez une preuve complète et valide de l'assertion ; répondre « faux » implique que vous donniez une preuve complète et valide de la négation de l'assertion proposée.*

Soit G un groupe abélien non trivial. Soit H_1, H_2, H_3 trois sous-groupes (distincts) non triviaux de G tels que $G = \sum_{i=1}^3 H_i$. Alors $G = \oplus_{i=1}^3 H_i$ si et seulement si $H_1 \cap H_2 \cap H_3 = (e_G)$.

Exercice 2 Soit G un groupe d'ordre 77 agissant sur un ensemble X de cardinal 41. Montrer que l'action de G sur X admet forcément un point fixe.

Exercice 3 Soient $p < q$ deux nombres premiers tels que p ne divise pas $q - 1$. Soit G d'ordre pq .

1. Montrer que G a un unique q -Sylow.
2. En déduire que $G \cong \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où α est un morphisme de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans $\text{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$.
3. Montrer que G est abélien.

Exercice 4 Soit ϕ un automorphisme de $\mathfrak{S}_n$ qui transforme une transposition en une transposition.

1. Montrer qu'il existe 3 entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$ distincts a_1, a_2, a_3 tels que $\phi((12)) = (a_1 a_2)$ et $\phi((13)) = (a_1 a_3)$.
2. Que vaut $\phi^{-1}((a_2 a_3))$?
3. Montrer que pour $i \in \llbracket 4, n \rrbracket$, il existe a_i tel que $\phi((1i)) = (a_1 a_i)$.
4. Montrer que $s : i \mapsto a_i$ est bijective. Donc $s \in \mathfrak{S}_n$.
5. En déduire que ϕ est l'automorphisme intérieur conjuguant par s .

Culture : Tout automorphisme de $\mathfrak{S}_n$ transforme une transposition en transposition si et seulement si $n \neq 6$ (exercice de combinatoire). Pour $n \neq 6$, tous les automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ sont donc intérieurs. Le cas $\mathfrak{S}_6$ est plus compliqué. En effet, $\text{Int}(\mathfrak{S}_6)$ est d'indice 2 dans $\text{Aut}(\mathfrak{S}_6)$.