

Vous disposez de **1 heure** pour répondre aux questions des exercices suivants. Les documents et calculatrices sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs. **Toutes les réponses devront être dûment justifiées.** Cet énoncé comporte 1 page.

Exercice 1

Répondre par « vrai » ou « faux » aux questions suivantes. *Répondre « vrai » implique que vous donniez une preuve complète et valide de l’assertion ; répondre « faux » implique que vous donniez une preuve complète et valide de la négation de l’assertion proposée.*

Soient G, G' deux groupes. Si les groupes $\text{Aut}(G), \text{Aut}(G')$ sont isomorphes, alors les groupes G et G' sont isomorphes.

Exercice 2

Soit G un groupe. Soient H, K deux sous-groupes de G tels que $HK = KH$. Montrer que le sous-groupe de G engendré par $H \cup K$ coïncide avec le sous-groupe HK .

Exercice 3

- 1) Soit G un groupe fini, non trivial, tel que, pour tout $g \in G$, on a $g^2 = e$.
 - a) Montrer que le groupe G est abélien.
 - b) Montrer qu’il existe un entier $\ell \in \mathbf{N}^*$ et un isomorphisme de groupes $((\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^\ell, +) \rightarrow G$.
- 2) Donner un exemple de groupe infini G' dont tous les éléments sont d’ordre fini.

Exercice 4

Soit G un groupe fini. Soit $\varphi \in \text{Hom}(G, (\mathbf{C}^*, \times))$. Calculer le nombre complexe $\sum_{g \in G} \varphi(g)$.