Théorie des groupes 2016

Corrigé contrôle continu 1

Exercice 1 Faux Exemple :

$G = \{e\}$ et $G' = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. G et G' ne sont pas équipotents donc pas isomorphes. $\text{Aut}(G)$ est le groupe trivial.

Un élément de $\text{Aut}(G')$ envoie 0 sur 0 et est une bijection, donc c'est l'identité. $\text{Aut}(G')$ est aussi le groupe trivial et est isomorphe à $\text{Aut}(G)$.

Exercice 2 $HK = KH$ implique que HK est un sous-groupe (Cours)

Soit $x \in HK$. Alors $\exists h \in H, k \in K, x = hk$. Donc x est un produit d'éléments de $H \cup K$ ce qui donne $x \in \langle H \cup K \rangle$. Ainsi $HK \subset \langle H \cup K \rangle$.

$H = H.e \subset HK$ (car $e \in K$). De même $K = e.K \subset HK$. D'où $H \cup K \subset HK$. On passe cette inclusion aux groupes engendrés : $\langle H \cup K \rangle \subset \langle HK \rangle = HK$ car HK est un groupe.

D'où le résultat par double inclusion.

Exercice 3

1. (a) Soient a et b dans G . $a^2 = e$ donc $a = a^{-1}$. De même $b = b^{-1}$.

$(ab)^2 = e$ donc $abab = e$. Multiplication à droite par $ba : ab = ba$.

Donc G abélien.

- (b) On note $A = \{X \in \mathcal{P}(G), G = \langle X \rangle\}$. G étant fini, on peut définir $l := \min_{X \in A} \text{Card}(X)$ et prendre une partie X réalisant ce minimum.

Notons $\{g_1, \dots, g_l\}$ les éléments de X . Tous les g_i sont différents du neutre, sinon $X \setminus g_i$ serait génératrice, ce qui contredirait la minimalité de l .

Pour tout $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$, on définit le sous-groupe $H_i = \langle g_i \rangle = \{e, g_i\}$ car tous les g_i sont d'ordre 2.

— Pour tout i , H_i est d'ordre 2 donc est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

— G est abélien, donc pour tout $i, j \leq l$ et pour tout $h_i \in H_i$ et $h_j \in H_j$, on a $h_i h_j = h_j h_i$.

— Supposons qu'il existe i tel que $K = H_i \cap H_1 \dots H_{i-1} H_{i+1} \dots H_l \neq \{e\}$. Comme H_i est de cardinal 2, que K contient e mais n'est pas $\{e\}$, K est forcément H_i . Donc $g_i \in H_1 \dots H_{i-1} H_{i+1} \dots H_l$. Cela implique que $X \setminus g_i$ est génératrice, ce qui contredit la minimalité de l .

Donc pour tout i , $H_i \cap H_1 \dots H_{i-1} H_{i+1} \dots H_l = \{e\}$.

— $G = \langle X \rangle = \left\{ \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}, n \in \mathbb{N}, x_i \in X, \alpha_i \in \mathbb{Z} \right\}$.

Comme G est abélien, on peut changer l'ordre des produits pour rassembler toutes les occurrences des g_j par ordre croissant de l'indice j . D'où $G = \left\{ \prod_{i=1}^l g_i^{\alpha_i}, \alpha_i \in \mathbb{Z} \right\}$.

Comme tous les éléments sont d'ordre 2, on peut supposer que $\alpha_i \in \{0, 1\}$.

Donc $G = \left\{ \prod_{i=1}^l g_i^{\alpha_i}, n \in \mathbb{N}, x_i \in X, \{0, 1\} \right\} = H_1 \dots H_l$.

Par théorème du produit direct d'une famille finie de groupes, on en déduit que $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l$.

2. $G' = ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}, +)$. G' est l'ensemble des suites sur un ensemble de cardinal différent de 1 donc est infini. Chaque coordonnée contient un élément d'ordre 1 ou 2, donc l'addition coordonnée par coordonnée de tout élément de G' avec lui même donne la suite triviale. C'est à dire que tout élément est d'ordre 2.

Exercice 4 Deux cas possibles :

1. Si φ est triviale : Pour tout $g \in G$, $\varphi(g) = 1$ et alors $\sum_{g \in G} \varphi(g) = \sum_{g \in G} 1 = |G|$
2. Sinon, il existe un $a \in G$ tel que $\varphi(a) \neq 1$. L'application $x \mapsto a.x$ est une bijection de G (mais pas un morphisme) et G est fini, donc on peut effectuer le changement de variable :

$$\sum_{g \in G} \varphi(g) = \sum_{g \in G} \varphi(a.g) = \sum_{g \in G} \varphi(a)\varphi(g) = \varphi(a) \sum_{g \in G} \varphi(g)$$

Comme $\varphi(a) \neq 1$, on a forcément $\sum_{g \in G} \varphi(g) = 0$