UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Théorie des groupes

Contrôle continu 2

Vous disposez de **1 heure** pour répondre aux questions des exercices suivants. Les documents et calculatrices sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs. **Toutes les réponses devront être dûment justifiées**. Cet énoncé comporte 1 page.

Exercice 1

Répondre par « vrai » ou « faux » aux questions suivantes. *Répondre « vrai » implique que vous donniez une preuve complète et valide de l'assertion ; répondre « faux » implique que vous donniez une preuve complète et valide de la négation de l'assertion proposée.*

Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. Alors le sous-groupe H est normal dans G si et seulement si $[G : H] = 2$.

Exercice 2

1) Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que deux permutations de $\mathfrak{S}_n$, possédant des supports disjoints, commutent.

2) On considère que $n = 8$ et l'on pose

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Calculer la décomposition en cycles de supports disjoints de σ^{2016}.

Exercice 3

Soit G un groupe non trivial. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1) Le groupe G n'a pas d'autres sous-groupe que G et $\langle e_G \rangle$.

2) Le groupe G est cyclique d'ordre premier.

Exercice 4

On note $\mathcal{A}_n$ le groupe alterné d'ordre n.

1) Rappeler la définition de $\mathcal{A}_n$ et préciser son ordre.

2) Montrer que $\mathcal{A}_4$ ne contient pas de sous-groupes d'ordre 6.

3) Le groupe $\mathcal{A}_4$ est-il cyclique ? (*Répondre par oui ou non, et produire une justification correcte et complète de la réponse.*)