Le but de ce devoir est de déterminer les groupes d'automorphisme de $\mathfrak{S}_n$ pour tout n.

1. **Cas $n = 2$:** Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_2)$ est le groupe trivial. On supposera désormais que $n \geq 3$.
2. **Automorphismes intérieurs :** Soit $n \geq 3$. Soit $h : \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \to & \mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n) \\ \sigma & \mapsto & h_\sigma \end{array}$ où h_σ est l'automorphisme intérieur conjuguant par σ. Montrer que h est un isomorphisme.
3. **Cas classique :** Soit ϕ un automorphisme de $\mathfrak{S}_n$ qui transforme une transposition en une transposition.
   (a) Montrer qu'il existe 3 entiers de $[\![1, n]\!]$ distincts a_1, a_2, a_3 tels que $\phi((12)) = (a_1a_2)$ et $\phi((13)) = (a_1a_3)$.
   (b) Que vaut $\phi^{-1}((a_2a_3))$?
   (c) Montrer que pour $i \in [\![4, n]\!]$, il existe a_i tel que $\phi((1i)) = (a_1a_i)$.
   (d) Montrer que $s : i \mapsto a_i$ est bijective. Donc $s \in \mathfrak{S}_n$.
   (e) En déduire que ϕ est l'automorphisme intérieur conjuguant par s.
4. **Où vont les transpositions ?**
   (a) Pour $i \in [\![1, \lfloor n/2 \rfloor]\!]$, on note $A_i^n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \sigma \text{ est le produit de } i \text{ transpositions à supports disjoints}\}$. A_1^n est donc l'ensemble des transpositions de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que les A_i^n sont des classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$.
   (b) Montrer que si ϕ est un automorphisme de $\mathfrak{S}_n$, Alors il existe un entier j impair tel que $\phi(A_1^n) = A_j^n$.
   (c) Montrer que $Card(A_i^n) = \binom{n}{n-2i} \times (2i-1) \times (2i-3) \times \cdots \times 1$.
   (d) En déduire que si $n \neq 6$, pour tout $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$ on a forcément $\phi(A_1^n) = A_1^n$.
   Gérer séparément les cas $n \leq 5$ et $n \geq 7$
   (e) Conclure sur $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$ quand $n \neq 6$.
   (f) Que peut-il se passer quand $n = 6$?
5. **Le cas exceptionnel de $\mathfrak{S}_6$**
   (a) **Existence d'un automorphisme non-intérieur**
      i. Soit une action **transitive** de $\mathfrak{S}_6$ sur un ensemble à 6 éléments. Une fois fixée la numérotation des 6 éléments, cette action peut être décrite par un morphisme $\rho : \mathfrak{S}_6 \to \mathfrak{S}_6$. Montrer que ρ est un isomorphisme (et donc un automorphisme).
      ii. Réciproquement, pourquoi un automorphisme de $\mathfrak{S}_6$ peut-il être vu comme une action transitive de $\mathfrak{S}_6$ sur un ensemble à 6 éléments ?
      iii. Pour tout $i \in [\![1, 6]\!]$, on note Σ_i le stabilisateur de i sous l'action naturelle de $\mathfrak{S}_6$ sur $[\![1, 6]\!]$. C'est à dire l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_6$ fixant i. Montrer que si ρ est un automorphisme intérieur, alors le stabilisateur de chaque point par l'action de ρ est un Σ_i.
      iv. Montrer que $\{\Sigma_i, i \in [\![1, 6]\!]\}$ est une classe de conjugaison de l'ensemble des sous-groupes d'indice 6 de $\mathfrak{S}_6$.
      v. Démontrer la proposition suivante :
         Si il existe H sous-groupe d'indice 6 de $\mathfrak{S}_6$ qui n'est pas un Σ_i, alors il existe un automorphisme non-intérieur de $\mathfrak{S}_6$.
      vi. En étudiant l'action de $\mathfrak{S}_5$ sur ses 5-Sylow, exhiber un sous-groupe de $\mathfrak{S}_6$ d'indice 6 et qui n'est pas conjugué à un Σ_i.

(b) **Structure de** $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6)$

i. Montrer que $\mathrm{Int}(\mathfrak{S}_6)$ est d'indice 2 dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6)$.

ii. Que peut être l'image d'un 5-cycle par un automorphisme de $\mathfrak{S}_6$?

iii. Montrer que l'ensemble des éléments de $\mathfrak{S}_6$ commutant avec un 5-cycle est le groupe engendré par ce 5-cycle.

iv. Montrer qu'il existe un automorphisme non-intérieur dont le carré est l'identité ou la conjugaison par un 5-cycle.

v. S'en servir pour exhiber un automorphisme non-intérieur d'ordre 2.

vi. En déduire que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6) \simeq \mathfrak{S}_6 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(c) **Bonus : A quoi ressemblent ces automorphismes non-intérieurs ?**

i. Montrer que le produit de deux transpositions est une double transposition si et seulement si ces deux transpositions sont de supports disjoints.

ii. Montrer que le produit de deux triples transpositions est une double transposition si et seulement si elles ont exactement une transposition en commun dans leur décomposition en produit de cycles disjoints. (Ce qui revient à dire qu'elle coïncident en exactement deux éléments)

iii. En déduire que l'image de la famille $((1i))_{i\in[\![2,6]\!]}$ génératrice de $\mathfrak{S}_n$ par un automorphisme non-intérieur est une famille de 5 triples transpositions dont les décompositions en cycles disjoints n'ont deux à deux aucune transposition commune. Autrement dit, aucune ne coïncide avec aucune autre en aucun point.

iv. Montrer qu'il y a 720 telles familles ordonnées de 5 triples-transpositions dans $\mathfrak{S}_6$.

v. En déduire que choisir une telle famille comme image de la famille génératrice $((1i))_{i\in[\![2,6]\!]}$ suffit à définir un automorphisme non-intérieur.